Modelltheorie zwischen Philosophie und Mathematik

Oliver Kutz

Berlin, 1999

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

> Die reine Mathematik ist jene Disziplin, bei der man weder weiß , worüber man spricht, noch ob das, was man sagt, wahr ist.
>
> Bertrand Russell

Der Terminus 'Modelltheorie' wird in sehr unterschiedlicher Weise verwendet. Sehr grob gesagt, versteht sich die Modelltheorie als die Semantik formaler Sprachen. In mathematischem Gewand versteht man unter Modelltheorie üblicherweise das Studium der Modellklassen (im Sinne der Tarskischen Semantik) von Theorien, formuliert in erststufigen Sprachen oder gewissen intensionalen Erweiterungen.

Die Relevanz der Modelltheorie für die Philosophie beginnt mit der Frage, inwieweit die Philosophie sich formaler Methoden und Sprachen bedienen sollte. Dabei reicht das Spektrum der Auffassungen von der *Philosophie der normalen Sprache*, die die Relevanz formaler Semantiken und Sprachen weitgehend zurückweist, bis zur *Philosophie der idealen Sprache*, die in ihrer radikalen Form behauptet, philosophische Fragen hätten erst dann einen unzweideutigen Sinn, wenn sie in formalen Sprachen formuliert seien, vgl. [Tetens 1997/98]. Stellt man sich auf diesen Standpunkt und vertritt zudem die These, daß erststufige Sprachen zur Formulierung philosophischer Fragen hinreichen, so wäre also das, was wir in der mathematischen Modelltheorie behandeln, nichts anderes als Philosophie. Vertritt man hingegen die Auffassung, daß die natürliche Sprache einen universellen Status genießt und nicht durch eine Metasprache überschritten werden kann, wie dies etwa im Logizismus Gottlob Freges zum Ausdruck kommt, so ist — da die natürliche Sprache insbesondere eine 'interpretierte' Sprache ist — Modelltheorie streng genommen unmöglich. Hiermit sind wir schon bei einer wichtigen Unterscheidung, nämlich der zwischen der Sprache als 'universellem Medium' und Sprache als Kalkül, die eine konzeptuelle Voraussetzung für die Möglichkeit von Modelltheorie darstellt (siehe 2.1, bzw. vgl. [Hintikka 1988] und [Demoupoulos 1994]).

In §2 sollen einige dieser konzeptuellen Voraussetzungen der Modelltheorie skizziert werden, um den radikalen Widerspruch zwischen „Unmöglichkeit der Modelltheorie“ und „Philosophie als Modelltheorie“ etwas aufzulösen. Dabei sei bemerkt, daß die Verbindungen zu grundlegenden Fragen der Philosophie der Sprache und Fundierungsproblemen der Mathematik so vielfältig sind, daß hier allenfalls beansprucht werden kann, skizzenhaft einige Aspekte herauszuarbeiten.

In §3 möchte ich dann am Beispiel der Entdeckung der Möglichkeit nicht–euklidischer Geometrien aufzeigen, wie modelltheoretische Methoden Einzug in die Mathematik fanden und die Erkenntnisse aus Abschnitt 2.1 nutzen, um einige erkenntnistheoretische Probleme im Zusammenhang mit der Frage nach der 'wahren' Geometrie des Raumes und nach der absoluten Widerspruchsfreiheit formaler Theorien aufzuzeigen.

2 Der Begriff des Modells

In der Diskussion der konzeptuellen Voraussetzungen der Modelltheorie beschränke ich mich auf die Rolle *nicht–logischer* Konstanten, die Bedeutung von Wahrheitsdefinitionen sowie die Unterscheidung von *algebraischen* und *nicht–algebraischen* Theorien (Stewart Shapiro).

2.1 Nicht–logische Konstanten und Wahrheitsdefinitionen

Hintikka unterscheidet zwei Funktionen der Logik, die *deduktive* und die *deskriptive* Funktion.[1] Die deduktive Funktion beschreibt er wie folgt:

> Logic is the study of the relations of logical consequence, that is, of relations of implication or entailment. Its concrete manifestation is an ability to perform logical inferences, that is, to draw deductive conclusions. [Hintikka 1996], S. 4.

Um nun ein deduktives System zu formulieren, verwendet man üblicherweise ein System von Axiomen, also Aussagen denen man einen basalen Status zuweist, sowie geeignete Schlußregeln. Hat man etwa eine nicht–logische Theorie 'vollständig' axiomatisiert, so lassen sich auf deduktive Weise *alle* 'Wahrheiten' dieser Theorie ableiten — man benötigt keine neuen Einsichten über den Gegenstand der Theorie, wie Experimente, Beobachtungen oder neue Axiome. Alles was wir über diese Theorie wissen können, ist gewissermaßen in den Axiomen und Schlußregeln 'codiert' oder 'komprimiert'. [2] Mit dem Beispiel eines nicht–logischen Axiomensystems sind wir nun auch schon bei der zweiten Funktion der Logik, der deskriptiven. Um eine solche Axiomatisierung überhaupt angeben zu können, müssen wir mathematische Begriffe mit Hilfe logischer analysieren, beschreiben oder konkretisieren. Dabei erhalten mathematische Begriffe oftmals ihre erste strikte Definition, gehen so von einer eher intuitiv–anschaulichen zu

[1]Die Erläuterungen stützen sich dabei weitgehend auf Hintikkas „The principles of mathematics revisited" ([Hintikka 1996]), insbesondere Kapitel 1: „The functions of logic and the problem of truth definitions".

[2]Die Schlußregeln sollen dabei die rekursive Auflistung aller logischen Wahrheiten, die aus dem Axiomensystem *logisch* folgen, gewährleisten. Hierbei ist zu beachten, daß solche Schlußregeln im allgemeinen nicht die (mathematische oder materiale) Wahrheit von Sätzen (in einer Struktur) vererben. Dies trifft insbesondere auf die Schlußregeln der klassischen Prädikatenlogik zu. Ein besonders einfaches Beispiel hierfür ist die Regel der *Necessitation* in der Modallogik. Von der (schlichten) Wahrheit von ϕ dürfen wir sicherlich nicht auf die Wahrheit von $\Box\phi$ schließen.

einer streng reglementierten Interpretation über. Ein Beispiel für eine solche begriffliche Analyse ist etwa die Definition der Stetigkeit im Rahmen der ϵ–δ Methode.[3] Auf diese Weise kann man also abstrakte mathematische Theorien als Explikationen gewißer intuitiver Begriffe auffassen, etwa die Topologie als Explikation des Begriffs der Stetigkeit und die Gruppentheorie als solche des Begriffs der Symmetrie. Hintikka weist nun dem systematischen Studium der deduktiven Funktion der Logik die *Beweistheorie* zu und der deskriptiven die *Modelltheorie* oder *logische Semantik* und fährt fort:

> Several highly influential logicians and philosophers used to maintain—and in some cases still maintain—the impossibility of model theory as a large–scale philosophically relevant systematic enterprise. Some used to deny the very possibility of model theory outright, some its possibility in the all–important case of our actual working (or perhaps better, thinking) language, while still others merely deny its philosophical relevance. In different variants, such doubts have been expressed by Frege, Russell, Wittgenstein, the Carnap of the early thirties, Quine and Church. [...]This underestimation of model theory among philosophically oriented logicians can typically be traced back to a failure to appreciate the descriptive (representational) function of logic. [Hintikka 1996], S. 11f.

Diesen Zweifeln begegnend, wollen wir gleich ausschließen, daß Modelltheorie in einem weit gefaßten Sinn unmöglich ist, denn schließlich handelt es sich um eine ausgewachsene mathematische Theorie. Berechtigt sind hingegen Fragen nach der philosophischen Reichweite und den begrifflichen Voraussetzung der Modelltheorie. Ich will mich im folgenden vor allem der letzten Frage widmen. Hier steht zunächst der Begriff des *Modells* selbst im Vordergrund. Man möchte einem Satz ϕ eine Klasse von Modellen (Strukturen, Szenarien, Situationen, mögliche Welten oder dergleichen) zuordnen, so daß ϕ in diesen Modellen „wahr" ist (gültig ist, erfüllt ist, etc.). Dabei ist die Klasse der Modelle, nennen wir sie $M(\phi)$, ausreichend groß oder, sagen wir, repräsentativ zu wählen. Die Idee hierbei ist, daß sich die Bedeutung von ϕ in seinen Modellen spiegelt.

Um dies zu konkretisieren muß man offenbar zunächst zweierlei tun. Wir müssen erstens erklären, welche Art von Strukturen wir generell als Modelle betrachten — d.h. wir müssen eine Klasse Ω auszeichnen, deren Elemente gerade die zulässigen Strukturen sind.[4] Dabei beachte man, daß diese Klasse Ω von zulässigen Modellstrukturen von vornherein als 'Universe of Discourse' fixiert sein muß.

---

[3] Diese deskriptive Funktion der Logik ist auch historisch für die Herausbildung mathematischer Begriffe wichtig. Im Wechselspiel von deduktiver und deskriptiver Funktion der Logik einigt man sich schließlich auf eine „strenge Definition". Für Fallstudien hierzu siehe etwa Lakatos' „Proofs and Refutations"([Lakatos 1976]).

[4] Die Standardwahl ist hier das Mengenuniversum. Ist eine beliebige Menge **M** gegeben, so interpretiert man beispielsweise die Extension eines Prädikats als eine Teilmenge von **M**. Diese Wahl ist aber sicher nicht zwingend und birgt einige Probleme, wie später noch klar

Zweitens müssen wir erklären, was es bedeuten soll, daß $\mathcal{M}$ ein Modell für ϕ ist und dies führt uns offenbar auf das Problem der Wahrheitsdefinition. Denn „$\mathcal{M}$ ist ein Modell für ϕ“ soll ja bedeuten, daß ϕ *wahr* ist in $\mathcal{M}$. Die Möglichkeit von Modelltheorie ist also untrennbar mit der Möglichkeit von Wahrheitsdefinitionen verbunden, und es überrascht in diesem Kontext vielleicht wenig, daß Tarski nicht nur die erste explizite Wahrheitsdefinition angegeben hat, sondern auch ein Hauptakteur in der (frühen) Entwicklung der (mathematischen) Modelltheorie war.[5] Ich werde hier nicht die Frage diskutieren, ob andere Wahrheitsdefinitionen als die Tarskische genauso gut geeignet wären, eine Modelltheorie zu begründen, und ebensowenig die Tarskische Theorie im Einzelnen erläutern.[6] Worauf es mir hier ankommt, ist es, einige Hauptmerkmale seiner Wahrheitstheorie zu nennen und die wichtigsten Schlußfolgerungen zu ziehen. Der erste Punkt, den man hier nennen sollte, ist der rekursive Aufbau seiner Definition. Die Wahrheit eines Satzes ergibt sich aus den Interpretationen seiner Bestandteile. Dieses Prinzip nennt man auch *Kompositionalität*.

Hiermit sind wir aber bereits unweigerlich bei der Frage, was denn die ‘Bestandteile’ eines formalsprachlichen Satzes sind, d.h. wir haben kurz die Rolle formaler Sprachen zu besprechen. Der heutige breite Konsens über die Struktur und ‘Funktionsweise’ formaler Sprachen täuscht über die Tatsache hinweg, daß das Herstellen jenes Konsenses nicht lange zurückliegt. Noch Freges ‘Begriffsschrift’ unterschied sich in wesentlichen Aspekten von der modernen Auffassung. Dies betrifft vor allem die Rolle *nicht–logischer Konstanten*. Sehr verkürzt dargestellt, vertrat Frege eine universalistische Position bezüglich der natürlichen Sprache und ihrer Logik. Nach Frege können wir in einer gegebenen Sprache weder ihre eigenen semantischen Grundlagen erklären, noch haben Begriffe wie ‘Metalogik’ oder ‘Metasprache’ Platz in seiner Konzeption von Logik und Sprachphilosophie. Die ‘Begriffsschrift’ ist demnach als eine echte Alternative zur natürlichen Sprache aufzufassen, d.h. als eine interpretierte Sprache, die keinen Raum für eine Re–Interpretation ihrer Symbole läßt. Dementsprechend können wir die Begriffsschrift, man denke an die Wittgensteinsche ‘Leiter–Metapher’, nur durch indirekte Hinweise und mit Hilfe eines semantisch–sprachlichen Vorverständnisses richtig auffassen. Auf Grundlage einer solchen, vollständig interpretieren formalen Spra-

werden wird. Zur Wahl von Modellstrukturen werde ich im nächsten Abschnitt noch einige Bemerkungen machen.

[5] Wie Hans Hermes in [Hermes 1972] S. 27–28 bemerkt, war der *Folgerungsbegriff*, wie wir ihn heute einführen, jedoch bereits im wesentlichen bei Bolzano in seiner 1837 erschienenen vierbändigen „Wissenschaftslehre“ vorhanden, wurde aber in der Folge wenig beachtet. Der *Folgerungsbegriff* wurde dann — unabhängig von Bolzano — hauptsächlich von Alfred Tarski 1935 in seiner Arbeit „Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen“ [Tarski 1935] erneut definiert. Diesmal, wegen der Zugrundelegung formaler Sprachen, mit höherer Präzision und einer ungeheuren Wirkungsgeschichte.

[6] Eine Alternative wäre etwa Hintikkas Versuch die Mathematik auf der Basis spieltheoretischer Semantik aufzubauen, vergleiche hierzu Hintikkas „The Principles of Mathematics revisited [Hintikka 1996].

che, scheint nun 'Modelltheorie' unmöglich. Demgegenüber findet man nun in Hilberts „Grundlagen der Geometrie" vielleicht das erste im 'modernen' Sinn *rein logische Axiomensystem.* Ein solches Axiomensystem zeichnet sich kurz gesagt dadurch aus, daß die 'Bedeutung' der nicht–logischen Terminologie auf rein axiomatischem Wege festlegt wird. Dies ist eine Grundvoraussetzung für die modelltheoretische Behandlung eines solchen Axiomensystems, da es die Re–Interpretation der nicht–logischen Konstanten in einer gegebenen Struktur erlaubt. Gewissermaßen fungieren also nicht–logische Konstanten in formalen Sprachen insofern etwa wie *indexikalische* Ausdrücke in natürlichen Sprachen, als ihre Referenz nur relativ zu einer gegebenen Struktur festgelegt wird. Daß eine solche Auffassung formaler Sprachen wesentlich für ein sinnvolles Betreiben von Modelltheorie ist, wird besonders deutlich durch eine Analyse der von Mißverständnissen geprägten Debatte um die „Grundlagen der Geometrie" zwischen Frege und Hilbert.[7]

Die folgende Passage illustriert, wie Tarski eine Auffassung der Umgangssprache als 'universeller Sprache' mit einer 'modernen' Auffassung bezüglich formaler Sprachen kombiniert. Insbesondere wird hier ein Skeptizismus bezüglich der semantischen Analyse der natürlichen Sprache von einer gleichsam 'höheren' Ebene mit einem Plädoyer für die modelltheoretische Methodik bezüglich formaler Sprachen verbunden.

> Ein charakteristisches Merkmal der Umgangssprache (im Gegensatz zu verschiedenen wissenschaftlichen Sprachen) ist ihr Universalismus: es wäre mit dem Geiste dieser Sprache unvereinbar, wenn in irgend einer anderen Sprache Worte oder Ausdrücke auftreten würden, die man nicht in die Umgangssprache übersetzen könnte, „wenn man überhaupt über irgend etwas sinnvoll sprechen kann, so kann man darüber auch in der Umgangssprache sprechen". Dieser universalistischen Tendenz der Umgangssprache in Bezug auf semantische Untersuchungen folgend, müssen wir konsequenterweise in die Sprache neben ihren beliebigen Aussagen und anderen Ausdrücken auch die Namen dieser Aussagen und Ausdrücke, weiterhin die Aussagen, welche diese Namen enthalten, ebenso solche semantischen Ausdrücke wie „wahre Aussage" „Name" „bezeichnen" u.s.w. aufnehmen. Andererseits ist eben dieser Universalismus der Umgangssprache im Gebiete der Semantik vermutlich die wesentliche Quelle aller sog. semantischen Antinomien, wie der Antinomie des Lügners oder der heterologischen Worte; diese Antinomien scheinen einfach ein Beweis dafür zu sein, dass sich auf dem Boden jeder Sprache, welche im obigen Sinne universal wäre und für welche hierbei die normalen Gesetze der Logik gelten sollten, ein Widerspruch ergeben muss. [Tarski 1935], S. 457 (278 original).

[7]Hierzu vergleiche man die ausführliche Diskussion dieser Debatte in [Demoupoulos 1994].

Mit anderen Worten, eine Zurückweisung der Philosophie der idealen Sprache ist durchaus kompatibel mit der Akzeptanz modelltheoretischer Semantiken für formale Sprachen, die sich 'unterhalb' der Umgangssprache befinden.

Grob gesagt, korrespondiert nun die Entscheidung für eine Tarskische Semantik mit der Auffassung, daß die 'Bedeutung' eines formalsprachlichen Satzes durch eine *Normierung* der logischen Konstanten gegeben wird, d.h. durch die Angabe der Wahrheitsbedingungen für diese Konstanten.[8]

Hierbei muß man beachten, daß quantifizierte Formeln durchaus offene Ausdrücke, das heißt solche mit freien Variablen, enthalten können. Daher können wir nicht von der Wahrheit der Teilausdrücke reden; insbesondere können wir keine induktive Definition über *Aussagen* bilden. Tarski löste dieses Problem, indem er den Begriff der *Erfüllung* einführte und Formeln relativ zu einer Belegung interpretierte. [9] Das so definierte Wahrheitsprädikat für erststufige Sprachen hat nun eine bemerkenswerte Eigenschaft, nämlich nur in einer Sprache zweiter Ordnung formulierbar zu sein, wie Hintikka prägnant zusammenfaßt:

> If a truth definition is formulated explicitly in a metalanguage, it is natural to assume that that metalanguage contains elementary arithmetic. Then one can use the normal technique of Gödel numbering to discuss the syntax of the first–order language in question. If this language contains a finite number of predicate and function symbols, then the logical type of the valuation function ν is essentially a mapping from natural numbers (Gödel numbers of symbols and formulas) into the individuals of the domain $do(\mathbf{M})$ of the model in question. The truth predicate itself which emerges from a Tarski–type treatment therefore has what logicians call a $\sum_1^1$ form. In other words, it has the form of a second–order existential quantifier (or a finite string of such quantifiers) followed by a first–order formula. All the quantifiers in this formula range over either natural numbers or else over the (other) individuals in the domain $do(\mathbf{M})$ of the model in question. In other words, they are first–order quantifiers. [Hintikka 1996], S. 14f.

Kommen wir abschließend noch kurz auf die Unterscheidung zwischen algebraischen versus nicht–algebraischen Theorien zu sprechen.[10] Diese Unterscheidung beruht im wesentlichen auf der Frage, welchen Status Aussagen haben sollen, die deduktiv unabhängig von einer gegebenen Theorie sind. Bewegen wir uns etwa in der Gruppentheorie, so zeichnen wir mit den Gruppenaxiomen eine *Klasse*

[8] Die wesentlichen Einwände gegen eine solche Auffassung beziehen sich dabei auf konfligierende Auffassungen bezüglich des Bedeutungsbegriffs. Diese Diskussion wird hier nicht weiter verfolgt und ist insbesondere in der logisch–mathematischen Grundlagenforschung von geringerer Relevanz, da sie sich vor allem auf die Behandlung der natürlichen Sprache bezieht.

[9] Eine Belegung ist dabei eine Abbildung, die jeder Variable ein Element des Trägers des Modells zuweist.

[10] Die folgenden Erläuterungen basieren auf [Shapiro 1997], S. 40ff.

von Strukturen aus. In diesem Fall hat z.B. die Frage, ob Gruppen kommutativ sind, keinen Wahrheitswert. Es steht einem frei, Gruppen zu studieren, die kommutativ sind und solche, die es nicht sind. Jedoch bleibt die 'Bedeutung' der nicht–logischen Konstanten insofern fixiert, als sie alleinig durch die Axiome reglementiert wird. Nicht–algebraische Theorien werden nun dadurch charakterisiert, daß wir von vornherein eine Struktur bis auf Isomorphie charakterisieren und die 'Bedeutung' der nicht–logischen Konstanten mit einem gewissen intuitiven Vorverständnis 'aufladen'. Klassische Beispiele hierfür sind die Zahlentheorie, die Theorie der reellen Zahlen und — mit deutlichen Abstrichen — die Mengenlehre. In diesem Fall kann man sich auf den Standpunkt stellen, daß jede Aussage über eine solche, bis auf Isomorphie charakterisierte, Struktur einen definiten Wahrheitswert hat, ohne daß man über die Mittel verfügte, über die Wahrheit oder Falschheit dieser Aussage zu entscheiden. Jedoch sollte man festhalten, daß die Aufgabe, eine Struktur in einer gegebenen formalen Sprache bis auf Isomorphie zu charakterisieren, mit der Kenntnis der 'intendierten' Theorie dieser Struktur nicht viel gemeinsam haben muß. Denn wie J. Corcoran in seiner Studie über Kategorizität zeigte,[11] kann man eine Theorie in der Sprache der Arithmetik angeben, deren Modelle stets isomorph zu den natürlichen Zahlen sind, ohne daß die Assoziativität der Addition beweisbar wäre.

2.2 Zur Wahl von Modellklassen: Kreisels Argument

Wie oben erwähnt, ist die Standardwahl für die Klasse der zulässigen Modellstrukturen das mengentheoretische Universum. Diese Klasse kann man sowohl sinnvoll beschränken — etwa durch gewisse Maximalitätsbedingungen an die Modelle — man kann sie aber auch durchaus erweitern, etwa indem man echte Klassen als Modelle zuläßt. Sicherlich erfassen wir mit den mengentheoretischen Modellen nicht alle *beliebigen* Interpretationen, und es ist prima facie völlig unklar, ob uns diese Beschränkung nicht schon bei der modelltheoretischen Analyse der elementarsten logischen Begriffe Schwierigkeiten bereitet.

In seiner Arbeit „Informal Rigour and Completeness Proofs“ [Kreisel 1969] hat Georg Kreisel nun dafür argumentiert, daß die prädikatenlogische Allgemeingültigkeit den Begriff der '*intuitiven logischen Gültigkeit*' extensional richtig erfaßt.[12] Dabei ist die (prädikatenlogische) Allgemeingültigkeit bekanntlich definiert als die Gültigkeit in allen (mengentheoretischen) Relationalstrukturen. Deren Träger (Objektbereiche) müssen insbesondere Mengen sein, deren Existenz im Rahmen der axiomatischen Mengenlehre gesichert ist. Auf der anderen Seite betrachtet Kreisel einen Satz ϕ als logisch gültig, wenn er sich unter *jeder beliebigen* Interpretation als wahr erweist. Mitunter muß ein logisch gültiger Satz auch in einer Interpretation wahr sein, die als Träger das *ganze* mengentheoretische

[11] Vgl. [Corcoran 1980].

[12] Die Erläuterungen stützen sich im wesentlichen auf [Bell/Slomson 1969] (S. 65–66) sowie [Etchemendy 1990] Kapitel 11.

Universum hat. Bei einer solchen Interpretation macht es auch durchaus Sinn, Prädikate durch *echte Klassen* zu interpretieren. Andererseits ist diese Interpretation natürlich kein Modell im prädikatenlogischen Sinn. Gibt es also hier ein Problem?

Es sei bereits hier vorweggenommen, daß Kreisels 'Lösung' von einer stillschweigenden Annahme Gebrauch macht, die entscheidend für die Korrektheit des Arguments ist, daß nämlich logische Wahrheit tatsächlich durch modelltheoretische Wahrheit in beliebigen Strukturen charakterisiert werden kann. Doch gerade dies ist eigentlich nicht selbstverständlich, wie unten näher begründet werden wird.

Die Kreiselsche Antwort auf die obige Frage lautet nun „Nein“, und das Argument verläuft wie folgt:
Bezeichnen wir einmal die Menge aller beweisbaren Formeln (in einer der üblichen erststufigen Axiomatisierungen der klassischen Logik) mit **Bew**, die der allgemeingültigen mit **Val** und schließlich die der logisch gültigen mit **LG**. Der Gödelsche Vollständigkeitssatz läßt sich nun prägnant in der Gleichung $\mathbf{Bew} = \mathbf{Val}$ ausdrücken und die Frage, ob wir mit Allgemeingültigkeit die logische Gültigkeit adäquat beschreiben, in der Gleichung $\mathbf{Val} = \mathbf{LG}$. Wir gehen weiter davon aus, daß die Axiome des Prädikatenkalküls nicht nur allgemeingültig sondern logisch gültig sind und daß die prädikatenlogischen Schlußregeln diese logische Gültigkeit konservieren. Mit anderen Worten, wir unterstellen die Wahrheit der Inklusion $\mathbf{Bew} \subseteq \mathbf{LG}$. Man beachte, daß dies keine Anwendung des Korrektheitssatzes der klassischen Logik ist, sondern die stärkere Behauptung, daß alle Axiome und Schlußregeln des Systems 'intuitiv logisch allgemeingültig' sind.

Darüberhinaus ist nun die Inklusion $\mathbf{LG} \subseteq \mathbf{Val}$ sicherlich zutreffend, da die Formeln in **LG** in 'mehr' Modellen gültig sein müssen, als jene in **Val**. D.h. aber, wir erhalten die Inklusionskette $\mathbf{Bew} \subseteq \mathbf{LG} \subseteq \mathbf{Val}$ und aufgrund des Vollständigkeitssatzes mithin die erwünschte Gleichung $\mathbf{Val} = \mathbf{LG}$.

Der Prädikatenkalkül beweist also tatsächlich — akzeptiert man Kreisels Definition — *alle* logisch gültigen Sätze.[13]

Was dieses Argument im Kern zeigt — und dies ist gerade ein Einwand von Etchemendy, ist, daß wir die Gültigkeit in *allen* modelltheoretischen Strukturen auf kleinere Klassen von Strukturen, etwa solche mit (abzählbaren) Mengen als Trägern reduzieren können. Etchemendy nennt solche Klassen “rich”. Akzeptiert

[13]Diese Reduktion kann sogar noch weiter getrieben werden, denn es reicht aus, abzählbare Modelle zu betrachten. Sei dazu die Menge der Sätze, die in allen abzählbaren Relationalstrukturen gültig sind, mit $\mathbf{Val_0}$ bezeichnet. Wir wollen zeigen, daß $\mathbf{Val_0} = \mathbf{LG}$ ist, können uns aber nach dem bereits Gesagten darauf beschränken, $\mathbf{Val_0} = \mathbf{Bew}$ zu beweisen. $\mathbf{Bew} \subseteq \mathbf{Val_0}$ ist „trivial“. Um die umgekehrte Inklusion zu zeigen, nehmen wir an, ein Satz σ gehöre nicht zu den beweisbaren Formeln. Dann gibt es (nach dem Vollständigkeitssatz) ein Modell, in dem σ nicht gültig, d. h. $\neg\sigma$ gültig ist. Nach dem Satz von Löwenheim–Skolem gibt es dann aber bereits ein abzählbares Modell, in dem $\neg\sigma$ gilt, so daß σ nicht zu $\mathbf{Val_0}$ gehören kann, was zu zeigen war. Daß sich dies nicht weiter auf endliche Modelle reduzieren läßt, dürfte klar sein.

man jedoch Kreisels Auffassung von logischer Gültigkeit, so zeigt das Argument darüber hinaus, daß wir in der Wahl des Systems des Prädikatenkalküls — denn dies soll doch gerade die logische Gültigkeit beschreiben — richtig gelegen haben, und erhöht auf der anderen Seite die Bedeutung des Vollständigkeitssatzes.[14] Es gibt jedoch noch ein weiteres Problem: Eine der Hauptforderungen Tarskis war die Zugehörigkeit der *intendierten Interpretation* einer Theorie zum Bereich der Modellstrukturen, die man zur modelltheoretischen Interpretation der Theorie verwendet. Verzichtet man auf diese Forderung, so ist nicht mehr sichergestellt, daß man nicht Aussagen für wahr erklärt, die im intendierten Modell 'tatsächlich' falsch sind. Und da Kreisel Sätze in der Sprache der Mengenlehre betrachtet, das intendierte Modell (also das Mengenuniversum **V**) aber gerade nicht zu den erlaubten Modellstrukturen gehört, wird diese Forderung im Falle der Mengenlehre verletzt.

Dies führt uns zu einem weiteren Einwand von Etchemendy. Differenziert man zwischen der Menge **LG** und einer Menge **VInt** von Aussagen, die man *unabhängig* von einer modelltheoretischen Begriffsbildung als intuitiv logisch gültig erachtet, so läßt sich zwar die Inklusion **Bew** $\subseteq$ **VInt** noch wie oben rechtfertigen. Jedoch läuft die Unterstellung der Inklusion **VInt** $\subseteq$ **Val** gerade auf die Behauptung hinaus, es gäbe keine intuitiv gültigen Sätze, die nicht in allen modelltheoretischen Strukturen gelten. Etchemendy widerspricht hier. Eine genaue Diskussion seiner Argumente würde hier zu weit führen, weshalb ich lediglich ein kurzes Beispiel nennen möchte. Betrachtet man die Sprache der erststufigen Arithmetik, so enthält jede für einen Vollständigkeitssatz (der Logik) hinreichend große Klasse von Modellen sogenannte Nicht–Standard–Modelle der Arithmetik. Etchemendy fragt nun:

> But what guarantee do we have that an intuitive logical truth in the language of arithmetic will be true in these nonstandard models, or that an intuitively valid argument will preserve truth in them? [Etchemendy 1990], S. 148.

Und in der Tat, nimmt man z.B. eine infinitäre ω–Regel als logisch gültig an — wofür zum Beispiel Tarski argumentiert hat —, so gibt es intuitiv logisch gültige Sätze, die *nicht* in allen Modellen gültig sind. Hier ist allerdings zu hinterfragen, ob eine solche Regel nicht weniger ein Teil der Logik sein sollte als vielmehr ein Bestandteil einer Theorie der natürlichen Zahlen. Bekanntlich erlaubt eine erststufige Axiomatisierung der Arithmetik ohne infinitäre Regeln keine modelltheoretische Charakterisierung der "True Arithmetic", also der Theorie des Standardmodells. Dies folgt aus dem Gödelschen Unvollständigkeitssatz. Allerdings sollte man das Problem der Nicht–Standard–Modelle nicht als Defizit

[14] Ich will hier jedoch *nicht* dafür argumentieren, daß wir in der Prädikatenlogik das einzig 'richtige' formale System für die Logik gefunden hätten, sondern lediglich den Punkt hervorheben, daß sich die Wahl der Modellstrukturen nicht einengend auf die Analyse des Begriffs der „logischen Gültigkeit“ auswirkte.

der modelltheoretischen Charakterisierungsfähigkeit auffassen, sondern eher als Spiegel der beschränkten Ausdrucksfähigkeit erststufiger Sprachen.

Ganz anders sieht die Lage übrigens in der Modallogik aus, deren Ursprung der Versuch war, den Begriff der „Notwendigkeit“ logisch zu erfassen.[15] Daß dort der Versuch weitgehend gescheitert ist, bemerken Bell/Slomson ganz zutreffend:

> Compare, for example, the situation with modal logic. Here various elegant completeness results have recently been obtained but it is still a matter of controversy as to whether any particular modal system adequately captures the notion of 'necessity'. [Bell/Slomson 1969], S. 65.

Ganz allgemein versucht man auch für nichtklassische Logiken geeignete Modellstrukturen zu finden, die einen Vollständigkeitssatz gewährleisten, um so zwischen syntaktischem und semantischem Schließen wechseln zu können. In der modalen Aussagenlogik z.B. — um auf obiges Beispiel zurückzukommen — begann man in den frühen sechziger Jahren mit dem Studium von Kripke- oder Mögliche–Welten–Semantiken[16], erkannte aber bald, daß diese Modellstrukturen zu undifferenziert waren. Man begegnete dem Phänomen der Kripke–Unvollständigkeit.[17] Diese Situation wurde durch eine Verallgemeinerung der Kripke–Semantik überwunden. Legt man diese verallgemeinerte Semantik zugrunde, so lässt sich wieder jede normale Modallogik durch eine Klasse von Frames charakterisieren.[18] In der modalen Prädikatenlogik ist die Situation übrigens noch weniger zufriedenstellend.[19] Hier gab es erst in den letzten Jahren substantielle Fortschritte hinsichtlich einer Verallgemeinerung der Modellstrukturen, so daß man sich bis heute nicht darüber einig ist, was man unter Modellen für nichtklassische Prädikatenlogiken verstehen soll, wie Skvortsov und Shehtman bemerken:

[15] Beginnend mit Aristoteles in der Ersten Analytik.

[16] Die Idee, „Notwendigkeit“ durch „Wahrheit in allen möglichen Welten“ zu interpretieren, geht auf Leibniz zurück.

[17] Eine modale Logik heißt Kripke–vollständig, wenn sie durch eine Klasse von Kripke–Frames (Modellen) semantisch charakterisiert wird. Z.B. wird die Logik **S5**, die man als Modellierung des Begriffs „Analytizität“ oder „logische Notwendigkeit“ verstanden hat, durch die Klasse aller Frames charakterisiert, deren Erreichbarkeitsrelation reflexiv, transitiv und symmetrisch, also eine Äquivalenzrelation ist. Ein interessantes Beispiel für eine Kripke–unvollständige Logik ist Solovays System **S**, in welchem er den Operator $\Box$ als „beweisbar“ interpretierte, jedoch so, daß er diejenigen Eigenschaften des Beweisbarkeitsprädikats einfangen sollte, die im Standardmodell von **PA** wahr sind. Diese Logik hat überhaupt keine Kripke–Modelle. Siehe hierzu etwa [Chagrov/Zakharyaschev 1997] S. 94ff.

[18] Diese verallgemeinerte Semantik wurde in ihren mathematischen Aspekten im Grunde schon in [Jónsson/Tarski 1951/52] entwickelt, wenngleich sie keinen Zusammenhang zur Modallogik herstellten. Die erste explizite Behandlung dieser verallgemeinerten Semantik findet man in [Makinson 1970]. Etwas ausführlicher ist die Entwicklung dieses Modellkonzepts bei Chagrov und Zakharyaschev beschrieben, [Chagrov/Zakharyaschev 1997], S. 282–285.

[19] In der Standard–Semantik ist hier zum Beispiel schon die quantifizierte Logik **S4** mit Gleichheit Kripke–unvollständig.

> Semantical methods in classical logic are provided by classical model theory. But for non–classical predicate logics, model theory has not yet been elaborated. One of the reasons for this delay is the variety of semantics for these logics making a general concept of a model too ambiguous. [Skvortsov/Shehtman 1993], S. 69.

Der Grund, wieso ich dies hier erwähne ist der, daß die Auszeichnung einer *geeigneten* Klasse von Modellen Modelltheorie erst ermöglicht. Dabei ist jedoch nicht völlig klar, was wir von unseren Modellstrukturen verlangen sollen, wann sie als „geeignet“ gelten dürfen. Ein Wahrheitsbegriff im Tarskischen Sinne lässt sich für so ziemlich jeden erdenklichen Modellbegriff einführen. Ist also die Forderung der semantischen Vollständigkeit wirklich zwingend für ein vernünftiges Betreiben von Modelltheorie? Die Frage ist hier nicht abschließend zu beantworten, einige Punkte scheinen allerdings klar zu sein. Die Leistungsfähigkeit der Modelltheorie (zumindest wenn man den mathematischen Gebrauch im Auge hat) hängt in hohem Maße von der Präsenz eines Vollständigkeitssatzes ab. Können wir nicht zwischen syntaktischen und semantischen Schließen qua Vollständigkeit wechseln, so ist eine Feststellung wie „Die Aussage ϕ ist in diesen und jenen Modellen gültig“ lediglich dann interessant, wenn wir den Modellen bereits eine inhaltliche Deutung gegeben haben. Wollen wir aber in einer deduktiv formulierten Theorie modelltheoretisch schließen, so ist ein Vollständigkeitssatz unerläßlich. Andernfalls gibt es Sätze die zwar in allen Modellen der Theorie gültig, jedoch nicht beweisbar sind. Mit anderen Worten der Schluß von Allgemeingültigkeit auf Beweisbarkeit ist nicht zulässig.

Erzwingt man einen Vollständigkeitssatz durch eine geeignete Modifizierung von Modellstrukturen (wie etwa in der Relevanzlogik oder der modalen Prädikatenlogik), so kann allerdings die Möglichkeit, die Modelle wirklich inhaltlich zu interpretieren, empfindlich leiden. Auf diesem Wege landet man schließlich bei einer im wesentlichen rein formalen Technik, die beweisbaren Formeln in einem gewissen Kalkül noch auf andere Weise zu charakterisieren. Ob man hier dann noch streng genommen von Semantik sprechen darf, ist gewiß zumindest in einigen Fällen zu diskutieren: eher handelt es sich hier um ein Übersetzungsphänomen: wir tauschen den Beweiskalkül ein gegen ein mehr oder weniger inhaltlich geleitetes Schließen in gewissen Modellstrukturen.

3 Modelle der Geometrie

In diesem Kapitel möchte ich anhand eines Beispiels verdeutlichen, wie modelltheoretische Überlegungen Einzug in die Mathematik fanden. Insbesondere wird es um die Frage gehen, wie die Widerspruchsfreiheit einer mathematischen Theorie etabliert werden kann und auf welchen Voraussetzungen solche Beweise fußen.

3.1 Euklidische Geometrie und das Parallelenpostulat

Die Geometrie galt seit ihrer axiomatischen Fassung durch Euklid als paradigmatisches Beispiel für Eleganz, Ökonomie der Mittel und Vollständigkeit. Mehr noch, ihre schlichte Wahrheit wurde über lange Zeit nicht in Frage gestellt. Kant stellt in dieser Entwicklung vielleicht einen Höhepunkt dar. Nach Kant erfahren wir Gegenstände nicht 'an sich', sondern nur in Raum und Zeit mittels unserer Anschauung. Raum und Zeit sind notwendige *Formen* unserer sinnlichen Anschauung von Gegenständen. Mithin sind allgemeine Aussagen über Raum und Zeit notwendigerweise wahr, sie sind synthetische Urteile a priori. Dies kann aber (nach Kant) nichts anderes heißen, als daß die euklidischen Postulate a priori wahr sind — sie können durch Erfahrung nicht widerlegt werden. Jedoch scheint schon Kant über seinen Freund Johann Lambert, der ein Pionier auf dem Gebiet der nicht–euklidischen Geometrien war, von der Möglichkeit der Konsistenz alternativer Geometrien gewußt zu haben, wie die folgende Passage aus der „Kritik der reinen Vernunft“ nahelegt:[20]

> So ist in dem Begriffe einer Figur, die in zwei geraden Linien eingeschlossen ist, kein Widerspruch, denn die Begriffe von zwei geraden Linien und deren Zusammenstoßung enthalten keine Verneinung einer Figur; sondern die Unmöglichkeit beruht nicht auf dem Begriffe an sich selbst, sondern der Konstruktion desselben im Raume, d.i. den Bedingungen des Raumes und der Bestimmung desselben, diese haben aber wiederum ihre objektive Realität, d.i. sie gehen auf mögliche Dinge, weil sie die Form der Erfahrung überhaupt a priori in sich enthalten. [Kant 1781], A 221.

Die fehlende Anschaulichkeit oder auch das Fehlen eines einsichtigen *Modells* für alternative Geometrien bestärkt also Kant noch in seiner Auffassung von der apriorischen Wahrheit der Axiome. Jedoch hat man später die Angabe von 'anschaulichen' Modellen für nicht–euklidische Geometrien als Argument interpretiert, die Kantsche These als widerlegt zu betrachten, so etwa Helmholtz:

> If indeed spaces of another kind are imaginable in the sense stated, this will also refute the claim that the axioms of geometry are in Kant's sense necessary consequences of a transcendental form, given *a priori*, of our intuition. (Zitiert nach [Webb 1995], S. 10.)

Andererseits konnte man dieses Argument auch umdrehen und argumentieren, daß die Konstruktion jener 'anschaulichen' Modelle gerade *innerhalb* des euklidischen Raums, den Sonderstatus der euklidischen Geometrie nur noch unterstreicht.

[20]Für eine genaue Diskussion der Frage, inwieweit Kant von der Möglichkeit nicht–euklidischer Geometrien wußte, konsultiere man [Webb 1995].

Die Wahrheit der euklidischen Geometrie schien jedenfalls vor der sich seit dem 18. Jahrhundert entfaltenden Diskussion um nicht–euklidische Geometrien unantastbar. Die Axiome stimmen mit den alltäglichen Erfahrungen im Umgang mit dem Raum überein. Ein induktiver Schluß scheint uns nun die Wahrheit der Axiome zu gewährleisten. Hier sollte man jedoch bedenken, daß endliche Erfahrung die Axiome lediglich plausibel macht. Morgen schon könnten wir mit einem Ergebnis konfrontiert werden, welches ein Axiom in Frage stellt. Auf der anderen Seite macht die Tatsache, daß wir in einem deduktiven System bisher keine Kontradiktion abgeleitet haben, dessen Konsistenz lediglich wahrscheinlicher. Da man jedoch annahm, daß die Axiome tatsächlich wahre Aussagen über den Raum oder über Gegenstände im Raum machten, konnte man also auch sinnvoll behaupten, das die Negation des Parallelenpostulats „wirklich falsch“ ist. Weiter konnte man der festen Überzeugung sein, daß die euklidische Geometrie als deduktives System konsistent ist. Dies basierte auf dem richtigen Prinzip, daß Sätze, die in einer gegebenen konkreten Struktur (also einem Modell) gültig, das heißt wahr, sind, auch miteinander verträglich sein müssen. Die Geometrie hatte also traditionell einen Doppelaspekt. Sie wurde einerseits als genaue Beschreibung des Raumes, in dem wir leben, verstanden, andererseits war sie eine intellektuelle Disziplin, ein ‘deduktives System’. Das berühmte 5. Postulat von Euklid lautete im Original wie folgt (zitiert nach Davis/Hersh [Davis/Hersh 1994] S. 225):[21]

5. Wenn zwei Geraden, die in einer Ebene liegen, sich mit einer anderen Geraden schneiden und wenn die Summe der Innenwinkel auf der einen Seite weniger als diejenige von zwei rechten Winkeln ausmacht, dann werden sich die Geraden schneiden, wenn sie auf der Seite, auf der die Winkelsumme weniger ist als zwei rechte Winkel, ausreichend verlängert werden.

Im Unterschied zu Euklids anderen Postulaten ist nun das Parallelenpostulat vergleichsweise kompliziert formuliert und scheint insbesondere nicht der direkten räumlichen Erfahrung entnommen. Um dies einzusehen, vergleiche man es etwa mit Euklids ersten vier Postulaten:

1. Zwischen zwei beliebigen Punkten kann eine Strecke gezogen werden.
2. Jede Strecke kann unbegrenzt gerade verlängert werden.
3. Ein Kreis kann mit jedem vorgegebenen Punkt als Mittelpunkt und jedem vorgegebenen Radius gezogen werden.

[21] Der Grund, wieso wir Euklids Postulat heute Parallelenpostulat nennen, ist übrigens der, daß es unter anderem zu folgender Aussage (deduktiv) äquivalent ist:

5.a In einer Ebene seien eine Gerade **L** und ein Punkt **P** nicht auf **L** gegeben. Dann gibt es genau eine Gerade durch **P**, die parallel zu **L** ist.

Diese Aussage ist auch als Playfair–Axiom (nach dem Briten John Playfair (1748–1819)) bekannt und hat sich aus sowohl technischen wie ästhetischen Gründen als die Standardformulierung durchgesetzt.

4. Alle rechten Winkel sind gleich.

Die ersten drei Postulate handeln von konkret durchführbaren *Konstruktionen*: man nehme zwei Punkte und verbinde sie durch eine Strecke, man verlängere eine gegebene Strecke um einen beliebigen (endlichen) Betrag, etc. Das vierte Postulat ist eine schlichte Identitätsbehauptung. Im Unterschied hierzu enthält das fünfte Postulat eine versteckte Existenzbehauptung: Die Geraden *werden* sich schneiden, wenn sie (in der richtigen Richtung) *ausreichend* verlängert werden. Es wird aber nichts darüber ausgesagt, wo wir diesen Schnittpunkt finden werden und offenbar läßt sich diese Forderung nicht in derselben Weise als eine mögliche *Handlung* interpretieren, wie dies bei den ersten drei Axiomen möglich ist. Es überrascht also kaum, daß das 5. Postulat von Anfang an einen anderen Status als die übrigen Axiome hatte und Geometer schon früh versuchten, es aus den anderen Axiomen herzuleiten. Das 5. Postulat wäre hiermit zu einem Theorem der euklidischen Geometrie ohne das Parallelen–Postulat geworden. Da dies auf direktem Weg nicht gelang, versuchte man es auf indirektem, indem man eine Negation des Postulats annahm und eine Kontradiktion abzuleiten suchte.

Dies war der Ausgangspunkt für die Entdeckung der Möglichkeit nicht–euklidischer Geometrien und ein erster Auftritt modelltheoretischer Methoden auf der Bühne der mathematischen Forschung.

3.2 Nicht–euklidische Geometrien

Es gibt zwei Möglichkeiten das Parallelenpostulat zu negieren. Sind eine Gerade **L** und ein Punkt **P**, der nicht auf dieser Gerade liegt, gegeben, so kann man entweder annehmen, daß durch **P** überhaupt keine Parallele zu **L** verläuft oder aber mindestens zwei. Die erste Annahme führte auf die sogenannte Riemannsche (oder elliptische), die zweite auf die Lobatschewskijsche (oder hyperbolische) Geometrie. Ich möchte hier nicht die recht verwickelte Geschichte der Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien rekonstruieren. Worauf es uns hier ankommt ist, daß man mathematisch zeigen konnte, daß beide Negationen mit den übrigen Axiomen der euklidischen Geometrie konsistent sind. Dies zeigte man gerade durch die Angabe eines Modells *innerhalb* der euklidischen Geometrie, die als konsistent vorausgesetzt wird. Ich will mich hier auf die Beschreibung der Riemannschen Geometrie beschränken. Wir interpretieren den Ausdruck „Ebene“ als Oberfläche einer euklidischen Kugel, den Ausdruck „Punkt“ als Punkt auf dieser Kugel[22] und schließlich den Ausdruck „Strecke“ als einen Abschnitt eines Großkreises auf dieser Oberfläche. Die Axiome der Riemannschen Geometrie gehen dann in Theoreme der euklidischen Geometrie über. Das Riemannsche Parallelenpostulat lautet dann in dieser Interpretation: Durch einen Punkt auf der

[22]Streng genommen interpretiert man aus technischen Gründen einen Punkt als Paar von Punkten auf der Kugeloberfläche, die sich diametral gegenüber liegen. Dies sichert, daß durch je zwei verschiedene ‘Punkte’ genau eine ‘Gerade’ verläuft.

Abbildung 1: Das Riemannsche Kugelmodell: Zwei Geradenstücke in der Riemannschen Ebene sind zwei Abschnitte von Großkreisen auf der euklidischen Kugel. Verlängert man diese, schneiden sie sich stets, im Widerspruch zum euklidischen Parallelenpostulat: Zu einer Geraden und einem Punkt außerhalb dieser Geraden gibt es keine Parallele.

Oberfläche einer Kugel kann man zu einem gegebenen Bogenstück eines Großkreises kein paralleles Bogenstück eines Großkreises ziehen. Man vergleiche hierzu Abbildung 1 und für eine Übersicht über die verschiedenen Eigenschaften der Geometrien Tabelle 1. Ähnlich wie im Falle der euklidischen Geometrie, wo man die Konsistenz der Theorie annahm, da man sie im gewöhnlichen Erfahrungsraum realisiert sah, sind nun die Riemannschen Postulate in diesem Kugelmodell *realisiert* und dürfen daher als widerspruchsfrei angenommen werden. [23] Aber gerade die Erkenntnis dieser Widerspruchsfreiheit alternativer Geometrien untergräbt nun den ursprünglichen Ausgangspunkt, daß die Geometrie unseren Erfahrungsraum eindeutig beschreiben soll. Es scheint, man muß sich auf den zweiten Aspekt der Geometrie zurückziehen, der Geometrie als einer deduktiven Wissenschaft. Man kann mit Inhetveen fragen

> Wenn alle diese „Geometrien“ in sich widerspruchsfrei sind, während sie sich paarweise widersprechen, wie kann man dann hoffen, überhaupt noch einen Zugang zu der Frage zu finden, welche „Geometrie“ nun „die wahre“ ist? [Inhetveen 1983], S. 9.

Einen ersten Versuch, in welcher Richtung man eine Antwort auf diese Frage erwarten könnte, oder, vielleicht genauer, inwiefern diese Frage überhaupt noch *Sinn* haben kann, gibt Mary Tiles, wenn sie bemerkt:

> It is no longer regarded as a sensible *mathematical* question to ask whether any of the axioms of Euclidean, or any other geometry, are

[23] Die Frage der nur relativen Konsistenz der nichteuklidischen Geometrien wird weiter unten genauer verfolgt.

Tabelle 1: Vergleich zwischen euklidischer und nichteuklidischen Geometrien der Ebene. Nach Prenowitz und Jordan [Prenowitz/Jordan 1965]

	Euklidische Geometrie	Lobatschewskijsche Geometrie	Riemannsche Geometrie	
Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in	höchstens einem	einem (einzigen elliptischen)	zwei (doppelten elliptischen)	Punkt Punkten
Für eine Gerade **L** und einen Punkt **P** nicht auf **L** gibt es	genau eine Gerade	mindestens zwei Geraden	keine Gerade	durch **P** parallel zu **L**
Eine Gerade	wird	wird	wird nicht	durch einen Punkt in zwei Teile geteilt
Parallele Geraden	sind äquidistant	sind nie äquidistant	existieren nicht	
Wenn eine Gerade eine von zwei parallelen Geraden schneidet,	muß sie	kann sie oder kann sie nicht	—	die andere schneiden
Zwei verschiedene Geraden senkrecht zu derselben Geraden	sind parallel	sind parallel	schneiden sich	
Die Winkelsumme eines Dreiecks ist	gleich	kleiner als	größer als	180 Grad
Die Fläche eines Dreiecks ist	unabhängig von	proportional zum Defekt	proportional zum Exzeß	seiner Winkelsumme
Zwei Dreiecke mit gleich großen entsprechenden Winkeln sind	ähnlich	kongruent	kongruent	

> *true.* If the question is asked as a question about the geometrical structure of physical space (or space–time) then it may be sensible, but it is a question for the physicist, not the mathematician and can only be answered by reference to physical theories and the body of empirical evidence to which such theories must answer. The mathematician may investigate the various geometries and characterize the structures in which their axioms are satisfied. [Tiles 1989], S. 194–195.

Eine mögliche Antwort, die etwa in dieser Richtung liegt, jedoch gewissermaßen noch weiter zurückgreift, liefern Lorenzen und Inhetveen mit ihrer auf dem Handlungsbegriff aufbauenden „Geometrie als Theorie der Formen“. Hier wird versucht, eine Rekonstruktion der geometrischen Terminologie zu leisten, die noch vor der empirischen, d.h. messenden Physik liegt. Diese Rekonstruktion beginnt nicht mit Wörtern für Körper oder Ereignisse, sondern „mit Wörtern für elementar handwerkliche *Handlungen* zur Herstellung derjenigen Sachverhalte, über die geometrisch zu sprechen ist“ (so Peter Janich in [Janich 1992] S. 32).[24]

Dieses Problem soll hier nicht weiter vertieft werden, aber es ist klar, daß eine Beantwortung dieser Frage gerade mit der möglichen Auszeichnung eines

[24]Eine ausführliche Beschreibung des Aufbaus der geometrischen Theorie nach diesem Ansatz findet man etwa in Lorenzen [Lorenzen 1984] und Inhetveen [Inhetveen 1983].

Standardmodells für die Geometrie zu tun hat. Offenbar haben wir hier eine Situation analog zur Mengenlehre. Auch in der Mengenlehre kann man etwa die Unabhängigkeit der Kontinuumshypothese zum Anlaß nehmen, verschiedene 'mögliche Mengenuniversen' zuzulassen und somit den Begriff der Menge nicht als 'absolut' sondern als abhängig von einer gegebenen (Mengen–) Theorie aufzufassen. Genauer werden unter der Annahme der Konsistenz einer Basistheorie wie etwa **ZF** mathematische Strukturen *konstruiert*[25], die die Theorie **ZF** realisieren und in dem einen Fall ebenfalls die Kontinuumshypothese, im anderen deren Negation. Es ist nun interessant, daß, obwohl die Situation in der Geometrie der in der Mengenlehre völlig analog zu sein scheint, man den Fall der mengentheoretischen Unvollständigkeit aus erkenntnistheoretischen Gründen durchaus anders bewerten kann, wie dies etwa Kurt Gödel in [Gödel 1947] und Mary Tiles in [Tiles 1989] betont haben. Dies hängt zunächst damit zusammen, daß man die Mengenlehre als gemeinsames Fundament der *gesamten* Mathematik, als 'Superstructure' wie Mary Tiles formuliert, auffassen kann. Hintikka faßt die Attraktivität der Mengenlehre für eine solche Rolle wie folgt zusammen:

> First–order logic is incapable of dealing with the most characteristic concepts and modes of inference in mathematics, such as mathematical induction, infinity, equicardinality, well–ordering, power set formation, and so forth. Hence mathematical thinking involves essentially higher order–entities of some sort or the other, be they sets, classes, relations, predicates, and so forth, in the strong sense of involving quantification over them. Formally speaking, mathematics can be done on the first–order level only if the values of individual variables include higher–order entities, such as sets. It is therefore theoretically illuminating to formulate mathematical theories in set–theoretical terms. Axiomatic set theory is accordingly a natural framework for mathematical theorizing. [Hintikka 1996], Introduction, S. VIII.

Die Frage nach der unterschiedlichen erkenntnistheoretischen Bewertung ist nun durch eine solche Rolle noch nicht geklärt. Vielmehr müssen wir noch einmal auf die Unterscheidung zwischen algebraischen versus nicht–algebraischen Theorien zurückgreifen. Die Mengentheorie kann man nämlich, faßt man sie wie Kurt Gödel als 'interpretierte' Theorie auf, unter die nicht–algebraischen Theorien einreihen. Demnach gibt es einen wohldefinierten Bereich von 'Gegenständen' — 'die Mengen', dessen Existenz die Wahrheit oder Falschheit beliebiger mengentheoretischer Sätze festlegt. In der Geometrie hingegen wird innermathematisch kein solcher 'Bereich' festgelegt. Kurz gesagt, läuft die These auf die Behauptung hinaus, die Mengenlehre habe ein durch den Mengenbegriff intrinsisch gegebenes

[25]Jedoch in der Regel nicht im strengen Sinne des Wortes, d.h. nicht konstruktiv im Sinne von 'finit' oder 'effektiv'.

Standardmodell, während im Fall der Geometrie die intendierte Interpretation durch externe Faktoren — etwa den Gebrauch der Geometrie im Rahmen der Relativitätstheorie — festgelegt werden muß. Hier kann natürlich nicht näher auf die extensive Diskussion um mengentheoretischen Realismus eingegangen werden, jedoch sollte festgehalten werden, daß die Argumente für die Existenz eines solchen Standardmodells alles andere als überwältigend sind. Üblicherweise wird an die sogenannte 'Intuition' der Mengentheoretiker appelliert, wobei man schnell an einen Punkt gelangt, an dem je zwei Mengentheoretiker je zwei 'Intuitionen' haben. Vergleicht man die Situation etwa mit der Zahlentheorie, wo wir das Standardmodell auf einfache Weise bis auf Isomorphie charakterisieren können, so ist es schwierig, sich dem Schluß zu entziehen, daß es schlicht kein solches Standardmodell gibt. Auch die Idee, Erkenntnisse über 'das Standardmodell' aus der 'Natürlichkeit' der Konsequenzen gewisser Axiome zu ziehen, ist philosophisch recht fragwürdig. Weder läßt sich Einigkeit über den Begriff der 'Natürlichkeit' herstellen, noch lassen sich ohne hinreichende Explikation 'des Standardmodells' allgemein akzeptierbare Kriterien angeben, auf welche Weise neue Kandidaten für Axiome getestet werden könnten. Insbesondere setzt man bei der Rede von der „Suche nach neuen Axiomen“ stets die Existenz jenes Standardmodells bereits voraus. Man beachte schließlich, daß beim modelltheoretischen Studium erststufiger Formulierungen der Mengenlehre, jedes Modell ein nicht–standard Modell im Sinne der zweitstufigen Logik ist, oder, wie Hintikka bemerkt: "[...] a set theorist would have to be called a guy (or a gal) who never knows what he or she is looking for." [Hintikka 1996], S. 169.

Ein handfesterer Unterschied zwischen Geometrie und Mengenlehre betrifft die Tatsache, daß axiomatische Erweiterungen der Mengenlehre relative Konsistenzbeweise ermöglichen, wobei sich insbesondere Axiome und ihre Negationen 'asymmetrisch' verhalten können. Sei zum Beispiel das Axiom, welches die Existenz unerreichbarer Kardinalzahlen behauptet mit AiC abgekürzt. Während nun die elliptische und hyperbolische Geometrie vom formalen Standpunkt aus gesehen völlig gleichberechtigt erscheinen, erlaubt die Theorie $ZF + (AiC)$ den Nachweis der Existenz eines Modells von ZF, während dies für $ZF + \neg(AiC)$ nicht der Fall ist. Darüber hinaus ermöglicht die Theorie $ZF + (AiC)$, neue, rein zahlentheoretische Aussagen zu beweisen, deren einzelne Instanzen numerisch überprüft werden können.

Ich habe oben festgehalten, daß wir anhand von Modellen innerhalb der euklidischen Geometrie die *relative Konsistenz* der nichteuklidischen Geometrien demonstriert haben. Zu diesem Begriff möchte ich im nächsten Abschnitt noch einige Bemerkungen machen.

4 Relative und absolute Widerspruchsfreiheit

Wir haben gesehen, daß man innerhalb der euklidischen Geometrie ein Modell konstruieren kann, das alle Axiome bis auf das Parallelenpostulat und zusätzlich die Riemannsche Annahme realisiert, nach der es keine Parallelen gibt. Dies zeigte die Konsistenz des Riemannschen Systems, jedoch nur relativ zur euklidischen Geometrie. Wäre diese widersprüchlich, so würde unsere Konstruktion überhaupt nichts demonstrieren, denn *alles* wäre deduzierbar. Wir können, ja müssen an dieser Stelle, also die Frage stellen, ob denn die euklidische Geometrie konsistent ist. Wie ich bereits erwähnt habe, ist nun die Antwort, daß die Axiome wahr seien, da sie unseren Raum beschreiben, und somit auch widerspruchsfrei seien, nach der Entdeckung der Möglichkeit alternativer Geometrien nicht mehr haltbar. Man muß also einen anderen Weg finden, um dies zu etablieren.

Mit der Angabe von Modellen für nichteuklidische Geometrien haben wir übrigens noch etwas Anderes — erkenntnistheoretisch Interessantes — gezeigt. Unter der Annahme der Konsistenz der geometrischen Axiome ohne das Parallelenpostulat (nennen wir diese Theorie einmal **G**) haben wir die Unmöglichkeit eines Beweises desselben in dieser Theorie demonstriert.[26] Denn das „Kugelmodell“ ist ein Modell für **G**, erfüllt aber gerade eine Negation des Parallelenpostulats. Wäre also das Parallelenpostulat in **G** beweisbar, so wäre die Theorie **G** schon inkonsistent.[27] Aber zurück zur Frage der Konsistenz der euklidischen Geometrie. Einen Weg, diese zu zeigen, schlug Hilbert vor, indem er die Geometrie in die Algebra einbettete. Er interpretiert Punkte als Zahlentripel, Geraden als lineare Abbildungen etc. Auf diese Weise gehen die Postulate der Geometrie in ‘wahre’ Aussagen der Algebra über. Die Aussage etwa, daß zwei Punkte eindeutig eine Gerade bestimmen, wird zu dem algebraischen Theorem, daß zwei Zahlentripel eine lineare Abbildung eindeutig bestimmen. Dieses Programm ist, wie Hilbert bewies, tatsächlich durchführbar und zeigt die Widerspruchsfreiheit der Geometrie relativ zur Algebra. Wiederum haben wir jedoch nur einen relativen Widerspruchsfreiheitsbeweis. Es scheint, daß wir im besten Fall erwarten dürfen, das Problem in einen einfacheren Bereich zu verschieben, in dem uns die Frage der Konsistenz weniger zweifelhaft erscheint. Ideal wäre es, wenn wir die Frage der Konsistenz auf die Konsistenz einer Theorie zurückführen könnten, die auch endliche Modelle hat. [28] Unglücklicherweise waren alle Modelle, die uns bisher begegnet sind, unendliche Modelle, d.h. ihr Gegenstandsbereich war unendlich. Bei solchen Modellen ist es, im Unterschied zu endlichen, nicht möglich, in endlicher Zeit konkret zu überprüfen, ob alle Axiome erfüllt sind. Bestenfalls können

[26] In ähnlicher Weise ist der Gödelsche Unvollständigkeitssatz ein Beweis der Unmöglichkeit, gewisse zahlentheoretische Aussagen *in* der Zahlentheorie zu beweisen.

[27] Dieser Sachverhalt lässt sich natürlich auch sofort aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz ableiten.

[28] Ein etwas künstliches Beispiel für eine solche Theorie mit endlichen Modellen geben zum Beispiel Nagel und Newman in [Nagel/Newman 1958] S. 21–23.

wir auf *schematische* Weise testen, ob unsere Postulate realisiert sind. Jedenfalls bleibt die Wahrheit der Axiome noch anzweifelbar. Die meisten interessanten mathematischen Theorien haben jedoch ausschließlich unendliche Modelle.[29] Hierzu brauchen wir nur an die elementare Theorie der natürlichen Zahlen zu denken: Jede Zahl **n** hat einen unmittelbaren Nachfolger **sn**, der von allen Vorgängern und von **n** selbst verschieden ist. Schon diese Theorie hat ausschließlich unendliche Modelle. Man kann vielleicht hier schon festhalten, daß die 'Modellmethode' in aller Regel keine entgültige Antwort auf die Frage nach der Widerspruchsfreiheit einer hinreichend komplizierten Theorie geben kann.

Einen anderen Weg, absolute Widerspruchsfreiheitsbeweise zu ermöglichen, schlug Hilbert mit seiner finiten Beweistheorie ein. Aufbauend auf der Unterscheidung von Metamathematik und Mathematik und der Beschränkung auf finite metamathematische Beweismethoden,[30] untersuchte er strukturelle Eigenschaften von deduktiven Systemen. Als Beispiel eines solchen Beweises betrachten wir kurz die klassische Aussagenlogik. Die Widerspruchsfreiheit (Konsistenz)[31] der Aussagenlogik folgt, falls wir zeigen können, daß mindestens eine Formel unbeweisbar ist. Wir können ohne weiteres nachprüfen, daß die Axiome der Aussagenlogik die Eigenschaft haben, Tautologien zu sein. Weiter vererbt die einzige Regel des Aussagenkalküls, der *modus ponens*, diese Eigenschaft auf *alle* beweisbaren Formeln. Andererseits ist die Formel $\mathbf{p} \vee \mathbf{q}$ keine Tautologie. Damit ist die Konsistenz der Aussagenlogik bereits bewiesen, und zwar augenscheinlich ohne die Konsistenz einer anderen *Theorie* vorausgesetzt zu haben. Ist der Beweis also im obigen Sinne absolut? Das einzige, was wir hier vorausgesetzt haben, ist unsere Fähigkeit mit Zeichen zu operieren und endlich viele Situationen zu überprüfen. Doch wenn wir hier einen Moment inne halten, bemerken wir, daß dies nicht so wenig ist, wie es auf den ersten Moment scheint. Die Fähigkeit, „endlich viele Situationen zu überprüfen", bedarf sicherlich einige elementare Logik, während das Operieren mit Zeichen im Aussagenkalkül gar nicht ausdrückbar ist. Insbesondere steckt hinter der Redeweise von „Vererben" bereits ein Induktionsschema, denn wir wollen ja nachweisen, daß eine Eigenschaft *allen* beweisbaren Formeln zukommt. Andererseits sind dies offenbar schon minimale Mittel, um über einen formalen Beweiskalkül zu räsonieren. Wir halten also fest, daß die Metasprache (oder besser Metatheorie), in der wir unseren Beweis ausgeführt haben, ausdrucksstärker ist als der Kalkül der Aussagenlogik, dessen Konsistenz wir

[29]Diese Behauptung muß man natürlich relativieren. Eine endliche Gruppe ist zweifellos auch ein interessantes (und wichtiges) mathematisches Objekt.

[30]Hilbert selbst hat nicht eindeutig erklärt, welche Beweismethoden er zu den finiten zählt. Vertreter der Hilbertschule haben den Begriff unterschiedlich stark interpretiert. Eine Konkretisierung des Begriffs „finit" stammt von Herbrand.

[31]Ich benutze hier die Begriffe der Konsistenz und der Widerspruchsfreiheit weitgehend synonym, da uns der Gödelsche Vollständigkeitssatz deren Austauschbarkeit garantiert! Man beachte jedoch, daß dies im Falle zweit– oder höherstufiger Logik gerade *nicht* mehr der Fall ist.

beweisen wollten, und daß auch dieser Konsistenzbeweis nicht *absolut* im strikten Sinne des Wortes ist. Dies schmälert aber kaum die *mathematische* Bedeutung eines solchen Konsistenzbeweises, denn der obige Umfang an Metatheorie ist gewiß überall in der Mathematik als konsistent vorauszusetzen. Die Beschränkung der Hilbertschen Methode, die sich hier andeutet, ist aber wesentlich fundamentaler, als man an diesem einen, recht einfachen Beispiel ersehen kann. Sie ist eine Konsequenz eines Ergebnisses, das Kurt Gödel 1931 in seiner Arbeit „Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I“ ([Gödel 1931]) bewies, genauer gesagt des heute so genannten 2. Gödelschen Unvollständigkeitssatzes: Ist eine Theorie **T** konsistent, so ist die Konsistenz von **T** *in* **T** *nicht beweisbar*. Um die Konsistenz einer Theorie formal zu zeigen, müssen wir demnach stets in eine stärkere Metatheorie ausweichen. Dabei ist zu bemerken, daß man, wenn man vom Beweis der Konsistenz von **T** *in* **T** redet, von der formalen Ableitbarkeit der (via Gödelisierung) objektsprachlichen Übersetzung der metamathematischen Behauptung der Konsistenz von **T** spricht. Dabei tritt ein ähnliches Phänomen der ‘Relativität’ von Begriffen wie im Fall des Skolemschen Paradoxes auf, hier jedoch bezogen auf metamathematische Begriffe. Ist nämlich eine konsistente Theorie **T** gegeben, so ist weder der objektsprachliche Satz $Con_{\mathbf{T}}$, noch $\neg Con_{\mathbf{T}}$ *in* **T** beweisbar. Demnach ist auch die Theorie $T' = \mathbf{T} \cup \{\neg Con_{\mathbf{T}}\}$ konsistent. Diese Theorie ist insofern eine ‘Lügnertheorie’, als sie konsistent ist und gleichzeitig ihre eigene Inkonsistenz, genauer den formalsprachlichen Satz $\neg Con_{\mathbf{T}'}$ behauptet.[32] Diese Interpretation ist jedoch mit größter Vorsicht (falls überhaupt) zu genießen, da die Theorie T' nicht explizit über ihre eigene Syntax redet und gödelisierte metasprachliche Sätze ihre intendierte ‘Bedeutung’ lediglich bei der Interpretation im Standardmodell haben. Die Theorie T' hat demnach nur nicht–standard Modelle.

Nachdem sich die Methode der Konstruktion von Modellen als ungeeignet erwies, absolute Gewißheit über die Konsistenz hinreichend komplizierter Theorien zu erhalten, müssen wir nun auch hier unsere Hoffnung fallen lassen. Demnach sind wir gezwungen in der Mathematik mit Theorien zu arbeiten, deren Konsistenz wir nicht mehr beweisen können, und es stellt sich die Frage, welche anderen Kriterien für die Akzeptierbarkeit einer Theorie in Frage kommen. Daß die Konsistenz *höchstens* eine notwendige Bedingung sein kann, erkennt auch Hilbert an, wenn er schreibt:

> [. . .] wenn über den Nachweis der Widerspruchsfreiheit hinaus noch die Frage der Berechtigung zu einer Massnahme einen Sinn haben soll, so ist es doch nur die, ob die Massnahme von einem entsprechenden Erfolge begleitet ist. In der Tat, der Erfolg ist notwendig; er ist auch hier die höchste Instanz, der sich jedermann beugt. (Zitiert nach [Curry 1951], S. 61, Fußnote 2.)

[32] Denn die Inkonsistenz von T' ‘folgt’ aus der Inkonsistenz von T.

Jedoch kann man mit guten Gründen anzweifeln, ob die Konsistenz einer Theorie für ihre Nützlichkeit wirklich erforderlich ist. Curry bemerkt zu Recht ([Curry 1951] S. 62), daß die Mathematik des 18. Jahrhunderts inkonsistent war, daß dies für Mathematiker späterer Generationen jedoch kein Grund war, Ergebnisse aufzugeben, sondern lediglich Theorien zu modifizieren und zu verbessern. Dies rückt mathematische Theorien erkenntnistheoretisch natürlich in die Nähe anderer wissenschaftlicher Theorien, wie etwa solche der Physik. Lakatos spricht von einer Renaissance des Empirismus in der Philosophie der Mathematik (siehe [Lakatos 1967]) und zählt eine ganze Reihe von Autoren auf, die sich in dieser Richtung geäußert haben, unter ihnen Curry, Quine, Rosser, Church, Gödel, Weyl, von Neumann, Bernays, Mostowski und Kalmar — eine beeindruckende Liste. Stellvertretend wollen wir einmal Haskell B. Curry zu Wort kommen lassen:

> The search for absolute certainty was evidently a principal motivation for both Brouwer and Hilbert. But does mathematics need absolute certainty for its justification? In particular, why do we need to be sure that a theory is consistent, or that it can be derived by an absolutely certain intuition of pure time, before we use it? In no other science do we make such demands. In physics all theorems are hypothetical; we adopt a theory so long as it makes useful predictions and modify or discard it as soon as it does not. This is what has happened to mathematical theories in the past, where the discovery of contradictions has led to modifications in the mathematical doctrines accepted up to the time of that discovery. Why should we not do the same in the future? Using formalistic conceptions to explain what a theory is, we accept a theory as long as it is useful, satisfies such conditions as naturalness and simplicity as are reasonable at that time, and is not known to lead us into error. We must keep our theories under surveillance to see that these conditions are fulfilled and to get all the presumptive evidence of adequacy that we can. The Gödel theorem suggests that is all we can do; an empirical philosophy of science suggests it is all we should do. [Curry 1963], S. 16.

Eine Diskussion der Frage aber, inwiefern Mathematik eine *empirische* Wissenschaft sein kann und wie bedeutend eigentlich die mathematische *Praxis*, das „Mathematik treiben“, sind, würde uns hier zu weit vom Thema wegführen.[33]

[33] Hierzu möchte ich auf die Aufsatzsammlung von Tymoczko verweisen, [Tymoczko 1986].

5 Schlußbemerkung

Epistemological foundationalism is dead [...]

Stewart Shapiro

Fassen wir zusammen. Die Möglichkeit von Modelltheorie setzt zunächst eine geeignete Auffassung formaler Sprachen voraus. Ein Kernbegriff in diesem Zusammenhang ist der eines *rein logischen Axiomensystems*, wie wir es etwa in Hilberts „Grundlagen der Geometrie“ finden. Die Möglichkeit der Re–Interpretation nicht–logischer Konstanten, die die Fixierung der ‘Bedeutung’ derselben durch rein axiomatische Mittel voraussetzt, ist ein Hauptmerkmal modelltheoretischer Methodik. Die Frege/Hilbert Debatte unterstreicht eindrucksvoll die Wichtigkeit dieser Erkenntnis (vgl. [Hintikka 1988]).

Ferner ist es von Bedeutung, die Unterscheidung zwischen algebraischen und nicht–algebraischen Theorien im Auge zu behalten. In algebraischen Theorien wie etwa der Gruppentheorie werden typischerweise *Klassen* von Strukturen ausgezeichnet. Dabei haben nicht–logische Konstanten wie etwa der ‘$\circ$’ („Kringel“) der Gruppentheorie keine fixierte Referenz, sondern werden *lokal*, relativ zu einer gegebenen Struktur, interpretiert. Dabei ist jedoch die ‘Bedeutung’ von ‘$\circ$’ in jedem gegebenen Modell $\mathcal{M}$ dieselbe, nämlich gerade die durch die Gruppenaxiome reglementierte Operation auf $dom(\mathcal{M})$. Anders sieht es im Falle nicht–algebraischer Theorien aus. Hier ist es möglich — ein Beispiel ist die Zahlentheorie — z.B. durch eine zweitstufige Charakterisierung Strukturen bis auf Isomorphie zu beschreiben. Diesem Sachverhalt liegt auch die Redeweise vom Standardmodell oder intendierten Modell zugrunde.

Ein wesentliches erkenntnistheoretisches Problem der Modelltheorie liegt nun gerade in der Frage nach der Möglichkeit der Auszeichnung eines solchen Standardmodells. Erst, wenn ein Modell einer Theorie sich bis auf Isomorphie charakterisieren läßt, macht es streng genommen Sinn, von der Wahrheit oder Falschheit beliebiger Sätze in dieser Theorie zu reden.

Wir haben gesehen, daß der Fall der Mengenlehre besonders delikat ist. Insbesondere kann hier mit guten Gründen bestritten werden, daß wir eine exakte Vorstellung ‘des Standardmodells’ hätten oder daß wir über geeignete Mechanismen verfügten, dies zu approximieren. Gelingt jene Approximation nicht, so rückt die Mengenlehre näher in Richtung algebraischer Theorien wie der Gruppentheorie. Dann wäre es sinnvoll, von verschiedenen gleichberechtigten Mengenlehren zu reden, und man müßte den Schluß ziehen, daß der Begriff der Menge selbst nicht hinreichend expliziert, d.h. unterbestimmt ist. Die Mengenlehre büßte hiermit gleichzeitig ihren Anspruch als Fundament der Mathematik ein.

Kommen wir zur Geometrie. Hier ist die Frage nach der Auszeichnung eines Standardmodells außerhalb der Mathematik, d.h. der Modelltheorie zu beantworten. Mit anderen Worten, die Geometrie des ‘Anschauungsraumes’, die ‘richtige’

Geometrie, ist genau dann eindeutig bestimmt, wenn der Begriff des 'Anschaulichen' *vollständig* expliziert ist. Dies kann unter geeigneten Restriktionen sowohl auf die euklidische wie auch auf nicht–euklidische Geometrien führen. Ferner ist die Modelltheorie gleichfalls nicht geeignet, die Frage der Konsistenz hinreichend komplizierter Theorien endgültig zu klären.

Mit anderen Worten, die Modelltheorie nimmt dem Philosophen so gut wie keine Arbeit ab.

Literatur

[Bell/Slomson 1969] J. L Bell und A. B. Slomson, *Models and Ultraproducts: An Introduction*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1969.

[Carnap 1928] Rudolf Carnap, *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 2000.

[Chagrov/Zakharyaschev 1997] Alexander Chagrov und Michael Zakharyaschev, *Modal Logic*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[Corcoran 1980] J. Corcoran, Categoricity, in: *History and Philosophy of Logic 1* (S. 187–207), 1980.

[Curry 1963] Haskell B. Curry, *Foundations of Mathematical Logic*, McGraw–Hill, New York, 1963.

[Curry 1951] Haskell B. Curry, *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, North–Holland Publishing Company, Amsterdam, London, 1970.

[Davis/Hersh 1994] Philip J. Davis und Reuben Hersh, *Erfahrung Mathematik*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1994.

[Demoupoulos 1994] William Demopoulos, Frege, Hilbert, and the Conceptual Structure of Model Theory, in: *History and Philosophy of Logic 15* (S. 211–255), 1994.

[Etchemendy 1990] J. Etchemendy, *The Concept of Logical Consequence*, Harvard University Press, Cambridge Mass., 1990.

[Gödel 1947] Kurt Gödel, What is Cantor's continuum problem? , in: Paul Benacerraf und Hilary Putnam (eds.): *Philosophy of mathematics. Selected Readings* (S. 470–486), Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[Gödel 1931] Kurt Gödel, Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I, *Monatshefte für Mathematik und Physik 38* (S. 173–198), 1931.

[Hermes 1972] Hans Hermes, *Einführung in die mathematische Logik: Klassische Prädikatenlogik*, B. G. Teubner, Stuttgart, 1972.

[Hintikka 1996] Jaakko Hintikka, *The Principles of Mathematics revisited*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996.

[Hintikka 1988] Jaakko Hintikka, On the Development of the Model–Theoretical Viewpoint in Logical Theory, in: *Synthese 77* (S. 1–36), 1988.

[Inhetveen 1983] Rüdiger Inhetveen, *Konstruktive Geometrie. Eine formentheoretische Begründung der euklidischen Geometrie*, B.I.–Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zurich, 1983.

[Janich 1992] Peter Janich, Form und Größe. Eine Wissenschaft wovon ist die Geometrie?, in: Ders.: *Grenzen der Naturwissenschaft. Erkennen als Handeln* (S. 26–43), C. H. Beck, München, 1992.

[Jónsson/Tarski 1951/52] B. Jónsson und Alfred Tarski, Boolean algebras with operators I + II, in: *American Journal of Mathematics Vol. 73* (S. 891–939), 1951, bzw. *ebd., Vol. 74* (S. 127–162), 1952.

[Kant 1781] Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1993.

[Kreisel 1969] Georg Kreisel, Informal Rigour and Completeness Proofs, in: Jaakko Hintikka (ed.): *The Philosophy of Mathematics*, Oxford University Press, London, 1969.

[Lakatos 1967] Imre Lakatos, A renaissance of empiricism in the recent philosophy of mathematics?, in: John Worrall und Gregory Currie (eds.): *Mathematics, science and epistemology, Philosophical Papers of Imre Lakatos, Volume 2* (S. 24–42), Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[Lakatos 1976] Imre Lakatos, *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematical Discovery*, Cambridge University Press, Cambridge, 1976.

[Lorenzen 1984] Paul Lorenzen, *Elementargeometrie. Das Fundament der analytischen Geometrie*, B.I.–Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1984.

[Makinson 1970] D. C. Makinson, A generalization of the concept of a relational model for modal logic, in: *Theoria 36* (S. 331–335), 1970.

[Nagel/Newman 1958] Ernest Nagel und James R. Newman, *Der Gödelsche Beweis*, R. Oldenburg Verlag, München, 1992.

[Nagel 1939] Ernest Nagel, The formation of modern conceptions of formal logic in the development of geometry, in: *Osiris Bd. VII*, 1939.

[Prenowitz/Jordan 1965] W. Prenowitz und M. Jordan, *Basic Concepts of Geometry*, Blaisdell–Ginn, New York, 1965.

[Putnam 1980] Hilary Putnam, Models and Reality, in: Paul Benacerraf und Hilary Putnam (Hrsg.): *Philosophy of Mathematics* (S. 421–446), Cambridge University Press, Cambridge, 1983.

[Shapiro 1997] Stewart Shapiro, *Philosophy of Mathematics. Structure and Ontology*, Oxford University Press, New York/Oxford, 1997.

[Skvortsov/Shehtman 1993] D. P. Skvortsov und V. B. Shehtman, Maximal Kripke–type semantics for modal and superintuitionistic predicate logics, in: *Annals of Pure and Applied Logic Nr. 63* (S. 69–101), 1993.

[Tarski 1935] Alfred Tarski, Der Wahrheitsbegriff in den formalisierten Sprachen, in: Karel Berka und Lothar Kreiser (Hrsg.): *Logik–Texte: Kommentierte Auswahl zur Geschichte der modernen Logik* (S. 443–546), Akademie Verlag, Berlin, 1986.

[Tetens 1997/98] Holm Tetens, Tarski, oder, immer noch keine Folgen in der Philosophie. Putnams Argumentation in seinem Aufsatz „Models and Reality". Die Idee der Philosophie als strenger Wissenschaft, die Philosophie der idealen Sprache und die Modelltheorie. *Seminar–Handouts*, Freie Universität Berlin, WS 97/98.

[Thiel 1995] Christian Thiel, *Philosophie und Mathematik: Eine Einführung in ihre Wechselwirkungen und in die Philosophie der Mathematik*, Wissenschaftliche Buchgesellschaft, Darmstadt, 1995.

[Tiles 1989] Mary Tiles, *The Philosophy of Set Theory: An Historical Introduction to Cantor's Paradise*, Basil Blackwell, Cambridge, Massachusetts, 1991.

[Tymoczko 1986] Thomas Tymoczko (ed.), *New Directions in the Philosophy of Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.

[Webb 1995] Judson Webb, Tracking Contradictions in Geometry: The idea of a Model from Kant to Hilbert, in: Jaakko Hintikka (ed.), *From Dedekind to Gödel: Essays on the Development of the Foundations of Mathematics* (S. 1–20), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.