Humboldt–Universität zu Berlin
Mathematisch–Naturwissenschaftliche Fakultät II
Institut für Mathematik

Freie Universität Berlin
Fachbereich Mathematik und Informatik
II. Mathematisches Institut

Kripke–Typ–Semantiken für die modale Prädikatenlogik

Diplomarbeit

vorgelegt im Sommersemester 2000 an der
Humboldt–Universität zu Berlin
Institut für Mathematik

von Oliver Kutz

Betreut durch

Dr. habil. Marcus Kracht (Freie Universität Berlin) und
Prof. Dr. Ronald Jensen (Humboldt–Universität zu Berlin)

Berlin, 26. Mai 2000

Inhalt

1 Einleitung

> Da aber Zukommen, notwendig Zukommen und kontingenter, d.h. möglicher- oder zufälligerweise Zukommen verschieden ist — denn vieles kommt einem zwar zu, aber nicht notwendig, und anderes kommt einem weder notwendig noch überhaupt zu, kann aber einem zukommen —, so wird offenbar auch in jedem dieser Fälle ein verschiedener Schluß gewonnen werden und können die Begriffe, aus denen der Schluß besteht, sich nicht auf gleiche Weise verhalten, sondern sie werden bald notwendig sein, bald einander einfach zukommen, bald kontingenterweise.
>
> Aristoteles, Erste Analytik[1]

Die Welt der modalen Aussagenlogik ist noch in Ordnung. Dort gibt es eine entwickelte mathematische Theorie samt Anwendungen in so vielfältigen Bereichen wie Linguistik, Philosophie, Informatik und den Grundlagen der Mathematik (etwa der Beweisbarkeitslogik). Die Entwicklung ist hier schon so weit gediehen, daß man beginnt, historische Phasen ihrer Entwicklung in diesem Jahrhundert auszumachen. So unterscheiden Robert Bull und Krister Segerberg — der Verführungskraft trichotomischer Einteilungen nachgebend — drei Phasen der Entwicklung der modalen Aussagenlogik, eine syntaktische, eine algebraische und eine modelltheoretische. Die erste Phase charakterisieren sie durch die weitgehende Abwesenheit einer expliziten Semantik, die zweite durch den Versuch algebraische Semantiken zur Analyse modaler Logiken heranzuziehen und schließlich die modelltheoretische durch die Dominanz sogenannter Mögliche–Welten–Semantiken [Bull/Segerberg 1984]. Nach ganz ähnlichen Kriterien unterscheiden Patrick Blackburn, Maarten de Rijke und Yde Venema etwas expliziter eine „syntaktische Ära"(1918 – 1959), eine „klassische Ära"(1959 – 1972) sowie eine „moderne Ära"(1972 – heute) [Blackburn/de Rijke/Venema 2000]. Zweifellos kann man jedoch festhalten, daß der enorme Entwicklungsschub, den die modale Aussagenlogik seit den siebziger Jahren erfahren hat, im wesentlichen auf den überwältigenden Erfolg der Kripke-Semantiken zurückzuführen ist. Nachdem etwa um 1970 auch das Problem der Kripke-Unvollständigkeit[2]

[1] Zitiert nach [Aristoteles 1992], S. 18.

[2] Eine modale Logik heißt Kripke–vollständig, wenn sie durch eine Klasse von Kripke–Frames semantisch charakterisiert wird. Z.B. wird die Logik **S5**, die man als Modellierung des Begriffs *Analytizität* oder *logische Notwendigkeit* verstanden hat, durch die Klasse aller Frames charakterisiert, deren Erreichbarkeitsrelation reflexiv, transitiv und symmetrisch, also eine Äquivalenzrelation ist. Ein interessantes Beispiel für eine Kripke–unvollständige Logik ist Solovays System **S**, in welchem er den Operator $\Box$ als „beweisbar" interpretierte, jedoch so, daß er diejenigen Eigenschaften des Beweisbarkeitsprädikats einfangen sollte, die im *Standardmodell* von *PA* wahr sind. Diese Logik hat überhaupt keine Kripke–Modelle. Siehe hierzu etwa [Chagrov/Zakharyaschev 1997], S. 94ff.

durch Einführung der *verallgemeinerten Frames*[3] gelöst war, hatte man eine Semantik gefunden, welche es erlaubte, jede normale konsistente Modallogik durch eine Klasse von 'Frames' zu charakterisieren.

Wechselt man nun die Perspektive und wirft einen Blick auf die Situation in der modalen Prädikatenlogik, so verändert sich das Bild drastisch. Das Interesse ist hier traditionell vorwiegend philosophischen Ursprungs. Schon Aristoteles verstrickte sich in der Ersten Analytik bei seinem Versuch, die Prinzipien quantifizierter Modallogik aufzuklären, in Schwierigkeiten, die man — mit [Łukasiewicz 1957] — lange Zeit für immanente Widersprüche hielt, und die man erst kürzlich — ebenfalls mit Mitteln, die den gewohnten modallogischen Rahmen überschreiten — einer Klärung hat näher bringen können (vgl. [Thom 1996]). Gleichwohl ist die modale Prädikatenlogik nicht nur in vielen (philosophischen) Disziplinen vertreten, sondern nach wie vor ein unentbehrliches Hilfsmittel zur Analyse philosophischer Fragen, wie etwa des Essentialismus, des Aktualismus oder der Theorie der Eigennamen.

Nach wie vor ist man sich jedoch höchst uneinig darüber, wie genau *Modelle* der modalen Prädikatenlogik aussehen sollen. Das Unbefriedigende dieser Situation wird deutlich, wenn man sich vor Augen hält, daß die Angabe einer geeigneten Klasse von Modellen eine Modelltheorie überhaupt erst ermöglicht. Will man ferner in einer axiomatisch formulierten (modalen) Theorie modelltheoretisch oder kalkülisiert schließen, so ist ein Vollständigkeitssatz unerläßlich. Denn anderenfalls kann man weder modelltheoretisch argumentieren, da man keine Modellklasse zu nennen weiß bzgl. derer Gültigkeit vorliegen muß; noch läßt sich in allgemeiner Weise vom Kalkül her argumentieren, da es gültige aber nicht herleitbare Sätze geben kann. Die methodologische Fruchtbarkeit semantischer Vollständigkeit hat auch Johan van Benthem hervorgehoben, wenn er schreibt:

> Thus the ubiquitous logical *completeness theorems* have a natural motivation for the philosopher of science as well: they embody conditions of adequacy on empirical theories in semantics. [van Benthem 1986], S. 187.[4]

Die wesentliche Ursache für die vielfältigen Modellbegriffe liegt dabei darin begründet, daß die Interpretation modaler prädikatenlogischer Formeln eine Vielzahl von Entscheidungen hinsichtlich der Denotation von Termen, des Wirkungsbereichs von Quantoren, der Interpretation von Prädikaten etc. verlangt. Die Fokussierung auf philosophische Anwendungen hatte aber den aus systematischer Sicht nachteiligen Effekt der Zersplitterung von Modellkonzepten (vergleiche Abbildung 1). Die Versuche, klassische Techniken der modalen Aussa-

[3]Diese verallgemeinerte Semantik wurde in ihren mathematischen Aspekten im Grunde schon 1951/52 von Jònsson und Tarski entwickelt [Jónsson/Tarski 1951/52], wenngleich sie keinen Zusammenhang zur Modallogik herstellten. Die erste explizite Behandlung dieser verallgemeinerten Semantik findet man 1970 bei Makinson [Makinson 1970]. Ausführlicher ist die Entwicklung dieses Modellkonzepts bei Chagrov und Zakharyaschev beschrieben [Chagrov/Zakharyaschev 1997].

[4]Relevant ist das Kapitel 9: „Logical Semantics as an Empirical Science“; vgl. auch den Aufsatz [van Benthem 1984].

genlogik, wie die Methode der kanonischen Modelle, auf die modale Prädikatenlogik zu übertragen, führten zudem — soweit sie überhaupt gelangen — auf immer künstlichere und kompliziertere Beweise von Vollständigkeitsresultaten. Ein Hauptproblem war hier insbesondere, daß ein erfolgreicher Vollständigkeitsbeweis für eine bestimmte Logik sich im allgemeinen als nutzlos erwies, sobald man den Blick auf andere Logiken richtete, da man im Beweis spezifische Eigenschaften der Logik (oder der Klasse von Logiken) genutzt hatte.

Ferner ist im Auge zu behalten, daß man einerseits modale Prinzipien axiomatisch fordern und informell begründen kann, andererseits eine Modallogik auch durch die Spezifizierung einer inhaltlich motivierten Modellklasse angeben kann. In diesem Fall kann es sein, daß die angegebene Modellklasse nicht geeignet ist, die informell eingeführten modalen Prinzipien zu interpretieren, und so die konkurrierenden Theorien nicht auf der gemeinsamen Ebene einer formalen Semantik diskutiert werden können.

Das Ziel einer gleichförmigen semantischen Behandlung, welche die Interdependenzen zwischen verschiedenen modalen Theorien aufzuweisen gestattet, wird auch aus einer verstärkt *wissenschaftstheoretischen* Sichtweise motiviert, wie David Pearce und Heinrich Wansing — sich auf die modale Aussagenlogik beziehend — betont haben:

> Most significantly, it is the manner in which the different theories *fit together* (in the lattice structure) that seems to be decisive for characterizing the research tradition and for exhibiting its internal coherence and uniformity. Thus, if we consider possible worlds semantics as comprising nets or ensembles of interrelated theories, we obtain not only strong structural analogies to scientific research traditions of the customary sort, we also acquire additional semantic and methodological support in favor of the kind of *uniform* representation of intensional semantics that the standard picture provides. [Pearce/Wansing 1988], S. 490.

Diese neue Einheitlichkeit zwischen den eher formalen, logisch–mathematischen und den eher inhaltlichen, begrifflich–philosophischen Aspekten der modalen Prädikatenlogik zu erreichen, wurde auch von Ghilardi und Meloni eingefordert:

> In fact, the unity between mathematical and philosophical aspects [...] now appears justified: we point out that this unity should be not assumed as a dogma, but reached during the work of conceptual explanation of the problems suggested by the mathematical and linguistic practice. [Ghilardi/Meloni 1991], S. 106.

Eine (unvollständige) Übersicht über den ‚Wald‘ möglicher Modellstrukturen gibt Abbildung 1 auf der folgenden Seite, die [Garson 1984] entnommen ist. Skvortsov und Shehtman fassen diese Situation wie folgt zusammen:

> Semantical methods in classical logic are provided by classical model theory. But for non–classical predicate logic, model theory has not yet been elaborated. One of the reasons for this delay is the variety of semantics for these logics making a general concept of a model too ambiguous. [Skvortsov/Shehtman 1993], S. 69.

Diese Situation ist natürlich sowohl aus logisch–systematischer wie auch aus philosophischer Sicht höchst unbefriedigend. Denn eine derartige Vielfalt von Modellstrukturen macht nicht nur eine komparative modelltheoretische Behandlung verschiedener (modal–) philosophischer Theorien unmöglich, sondern darüber hinaus illustriert die Abwesenheit einer allgemeinen Semantik auch eine fundamentale Lücke im Verständnis der Ausdrucksfähigkeit von modalen Sprachen erster Stufe. Diese Lücke durch Angabe einer hinreichend flexiblen formalen Semantik zu schließen, stellt daher ein dringendes Desiderat dar. Insbesondere steht zu erwarten, daß sich erst dann ähnlich erfolgreiche Anwendungen wie im Fall der modalen Aussagenlogik ergeben — etwa in Modellierungsversuchen der KI, der Linguistik oder der Philosophie — wenn diese Unübersichtlichkeit grundsätzlich überwunden ist.

Daß dieses Ziel nun erreichbar scheint, liegt an den beträchtlichen Fortschritten im Bereich der formalen Semantik, die in den letzten Jahren erzielt wurden.

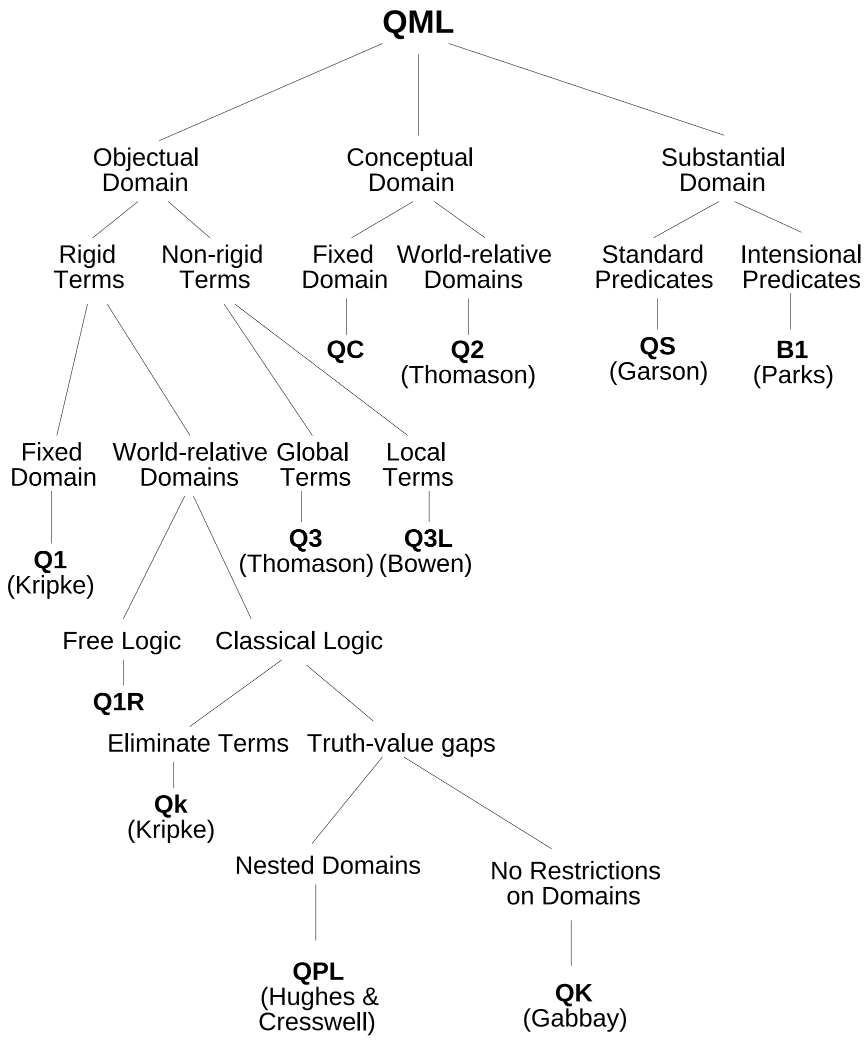

Abbildung 1

2 Über die Inadäquatheit der Kripke–Semantik

Fassen wir die konzeptuellen Quellen der Vielfalt von Modellstrukturen noch einmal näher ins Auge. Gehen wir von einem Standard–Kripke–Frame der Form $(\mathcal{F}, \leq, \mathcal{D})$ aus, so bietet sich zunächst eine Klassifizierung der Modellstrukturen in folgende vier Kategorien an:

1. *Variierende Gegenstandsbereiche*: Falls $\mathcal{D}$ keinen speziellen Bedingungen genügt.
2. *Monotonie*: Ist $\alpha \leq \beta$, so gilt $D_\alpha \subseteq D_\beta$ für alle 'Welten' α und β.
3. *Anti–Monotonie*: Ist $\alpha \leq \beta$, so gilt $D_\alpha \supseteq D_\beta$ für alle 'Welten' α und β.
4. *Konstante Gegenstandsbereiche*: Falls für alle 'Welten' α und β $D_\alpha = D_\beta$ gilt.

Man beachte, daß etwa eine Entscheidung für konstante Gegenstandsbereiche kaum philosophisch motiviert sein kann, sondern eher der einfachen technischen Zugänglichkeit derartiger Modellstrukturen entspringt. Modelle, die *monoton* bzw. *anti–monoton* sind, korrespondieren bekanntlich auf der axiomatischen Ebene mit der Forderung, daß die konverse Barcan Formel bzw. die Barcan Formel zur Logik gehören. Desweiteren läßt sich — wie Hughes und Cresswell in [Hughes/Cresswell 1996] betont haben — die Entscheidung für beliebige bzw. konstante Gegenstandsbereiche mit der Behandlung von Quantoren korrelieren, genauer mit der „possibilistischen" bzw. „aktualistischen" Quantifikation.

Ein entscheidender Punkt hierbei ist offenbar jeweils die Frage, welche gewünschten Eigenschaften der Interpretation *modal definierbar* sind. Hierfür stellen die Barcan–Formeln[5] ein klassisches Beispiel dar. Legt man klassische Kripke–Semantiken zu Grunde, so entsprechen sie auf der modelltheoretischen Ebene — wie gerade schon erwähnt — der Monotonizität bzw. Anti–Monotonizität der Gegenstandsbereiche. Solche Korrespondenzen lassen sich jedoch — wie Ghilardi und Meloni zeigten — in verallgemeinerten Semantiken sehr viel subtiler herstellen. Sie bemerken (im ‚Jargon' der Funktor–Semantik):

> [...] however notice that the condition for the transition relations D_k to be partial functions, partial injective functions, totally defined relations, etc. are easily seen to be modally definable [...], so by introducing appropriate simple additional axioms one can avoid splittings, identifications, deaths and births. [Ghilardi/Meloni 1991], S. 82.

Es dürfte klar sein, daß jedes Festlegen auf eines der obigen (klassischen) Modellkonzepte diverse Interpretationen ausschließt. Entscheiden wir uns z.B. für konstante Gegenstandsbereiche, so wird das „Reden" über nicht–existente aber

[5] Diese tauchen zum ersten Mal — allerdings in einer notationellen Variante mit $\Diamond$ und strikter Implikation — 1946 als Axiom 11 in Ruth Barcan Marcus Arbeit „A functional calculus of first order based on strict implication" (siehe [Marcus 1946]) auf. Vergleiche auch [Marcus 1993].

„mögliche" Objekte ausgeschlossen.[6] Setzt man sich also zum Ziel, eine modelltheoretische Behandlung beliebiger modaler Prädikatenlogiken und damit eine *Formalisierbarkeit* verschiedenster Einstellungen bezüglich der Interpretation der modalen Sprache zu ermöglichen, so verbietet sich jede Festlegung auf eine spezifische Modellstruktur vom Standard–Kripke–Typ. Garson hat dieses Ziel 1984 wie folgt formuliert:

> Ideally, we would like to find a completely general completeness proof. [...] The proofs for all less general systems would then fall out of the general proof just as proofs for the stronger propositional modal logics result from the completeness proof for **K**. This would help clarify and unify quantified modal logic. [...] We hope that the tools which we display in this section will help others find better ways to reach this goal. [Garson 1984], S.273.

Die Frage nun, wie eine solche verallgemeinerte Semantik strukturiert sein müsste, um einen „völlig allgemeinen Vollständigkeitssatz" zu gewährleisten, wird Gegenstand der Untersuchungen sein. Dabei wird auch das Problem im Auge zu behalten sein, inwiefern der übliche *syntaktische Apparat* quantifizierter Modallogiken hinreicht, um bestimmte philosophische Probleme zu formalisieren. Hierzu werden einige Bemerkungen bei der Diskussion von Fittings Abstraktionsprinzip gemacht.

Ein weiteres Argument für die Inadäquatheit der Kripke–Semantik ist die Trivialisierung des Problems der *Re–Identifizierung* eines Individuums in verschiedenen möglichen Welten, wie es unter anderem David Lewis in seiner Counterpart–Theorie diskutiert hat [Lewis 1968]. Dabei beachte man, daß man auch dann, wenn man die Monotonizität aufgibt, in der Standard–Semantik davon ausgeht, daß in verschiedenen Welten ein und dieselben Gegenstände liegen können.

In der Tat ist dies die Quelle diverser Unvollständigkeitsresultate für recht einfache quantifizierte Modallogiken und der wesentliche Ansatzpunkt für Verallgemeinerungen der klassischen Semantik. Denn gerade diese Verbindung zwischen Unvollständigkeit auf der einen Seite und dem Individuierungs- und Re–Identifizierungsproblem auf der anderen Seite, scheint nahe zu legen, daß es sich hier nicht um bloß 'mathematische Artefakte' handelt, sondern eine echte konzeptuelle Inadäquatheit der Kripke–Semantik verborgen liegt.

[6] Denn dies verlangt, daß in einer möglichen Welt α ein Gegenstand **a** nicht existiert, welcher jedoch im Gegenstandsbereich einer anderen Welt β liegt. Um dies formal ausdrücken zu können, brauchen wir also offensichtlich auch *nicht–denotierende Terme* oder ein *Existenzprädikat*.

3 Erweiterungen der klassischen Kripke–Semantik

Den Unzulänglichkeiten der klassischen Semantik kann man auf (mindestens) zweifache Weise begegnen. Verallgemeinert man die Semantik dahingehend, daß man zusätzliche Relationen zwischen Individuen oder Welten einführt, erhöht man die Flexibilität der Interpretation. Individuen können nun z.B. (wahlweise) 'verschwinden' oder 'sich vermehren'. Andererseits kann man sich auch auf den Standpunkt stellen, daß die Kripke–Semantik im wesentlichen angemessen ist, lediglich der syntaktische Apparat nicht hinreicht, um bestimmte Probleme adäquat zu formalisieren. Beide Ansätze seien kurz skizziert.

3.1 Modifizierung der Semantik

Ausgehend von den zahlreichen Unvollständigkeitsresultaten in der modalen Prädikatenlogik und dem gleichzeitigen Erfolg von Kripke–Semantiken im aussagenlogischen Fall, ergibt sich zwangsläufig die Frage, ob die Standard–Kripke–Semantik dahingehend verallgemeinert werden kann, daß die formal–semantische Charakterisierbarkeit beliebiger Logiken erreicht wird.[7] Geht man von einem Standard–Kripke–Modell der Form $< \mathcal{F}, \mathcal{D} >$ aus, wobei $\mathcal{F}$ ein (aussagenlogisches) Frame bezeichne und $\mathcal{D}$ einen Gegenstandsbereich, so bieten sich zunächst zwei Richtungen an, Verallgemeinerungen anzugeben. Die erste Möglichkeit besteht darin, das Frame durch eine geeignete Algebra zu ersetzen und so eine *algebraische-* bzw. *topologische Semantik* zu erhalten. Solche Modifizierungen haben aber aufgrund ihrer Abstraktheit oftmals den Nachteil, daß sie modelltheoretisches Schließen schwierig machen, da der 'geometrische' Charakter der Modelle verloren geht. Der andere Weg, den wir hier verfolgen wollen, versucht, zusätzliche Relationen zwischen den Individuen des Gegenstandsbereichs einzuführen, und so die Wahrheitsbedingungen so eng als möglich an denjenigen der Standard–Kripke–Semantik zu orientieren. In dieser Richtung sind verschiedene Versuche unternommen worden. So haben Shehtman und Skvortsov in [Skvortsov/Shehtman 1990] *Kripke–sheaves* und *Kripke–bundles*, Ghilardi in [Ghilardi 1989] eine Funktor–Semantik ($\mathcal{C}$–sets) sowie schließlich Shehtman und Skvortsov in [Skvortsov/Shehtman 1993] die *Metaframe–Semantik* angegeben. Diese Semantiken eignen sich insbesondere, um Unvollständigkeitresultate bezüglich der Standard–Kripke–Semantik zu erhalten.[8] Es läßt sich nun zeigen, daß sich die eingeführten Semantiken nach ihrer semantischen Stärke — wie in Abbildung 2 auf der folgenden Seite gezeigt — ordnen lassen. Dies ist so zu verstehen, daß sich jedes $\mathcal{C}$–set der Funktor Semantik als ein spezielles Metaframe, jedes Kripke–Bündel als $\mathcal{C}$–set usw. auffassen läßt.

Aufgrund dieser hierarchischen Ordnung wäre es instruktiv zu sehen, inwiefern die verschiedenen Semantiken graduell die Beschränkungen der klassischen Kripke–Semantik überschreiten. Im Detail ist dies noch nicht ausgearbeitet worden; jedoch haben Ghilardi und Meloni bezüglich der Funktor–Semantik die wesentlichen Unterschiede zu klassischen Ansätzen herausgearbeitet, was

[7]Hierbei ist natürlich entscheidend, sich zunächst darauf zu einigen, was eine modale Prädikatenlogik formal genau ist.

[8]Siehe hierzu z.B. Ghilardi [Ghilardi 1991].

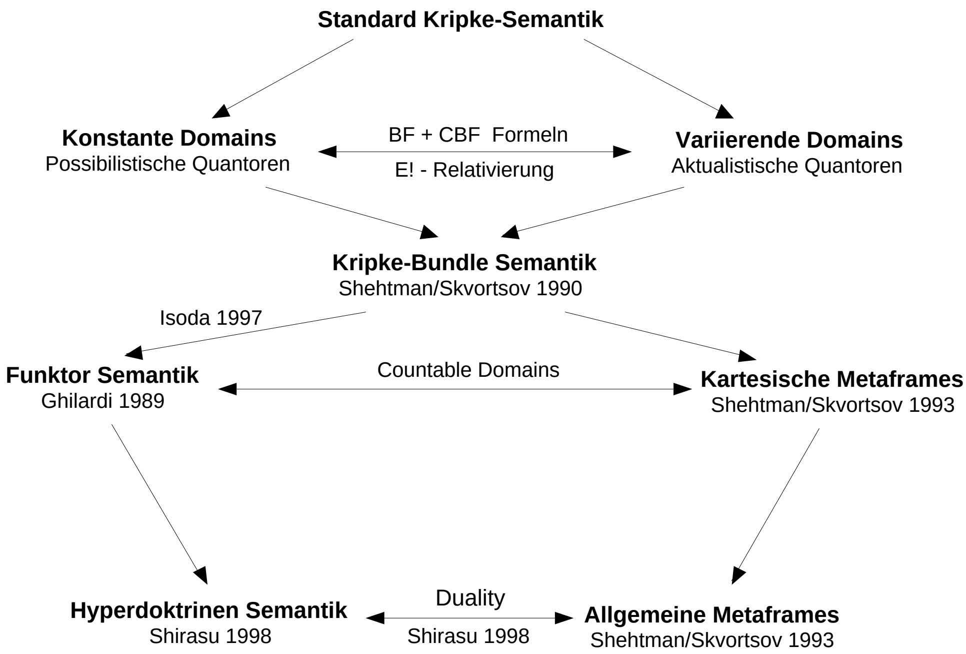

Abbildung 2

insbesondere interessant ist, da sich die Funktor–Semantik in der Metaframe–Semantik interpretieren läßt. Sie verteidigen zunächst das hohe mathematische Niveau ihrer Untersuchungen mit der — auch dieser Arbeit zugrundeliegenden — Auffassung, daß mathematisch–technische und logisch–philosophische Entwicklungen untrennbar miteinander verwoben sind:

> One can now think that this is mathematics, not just philosophy or logic: we think nevertheless that *there is a deep unity between philosophical and mathematical questions*, in what they study, from apparently different points of view, the same object, namely the variation during space, time and knowledge. [Ghilardi/Meloni 1991], S. 80.

Die grössere Allgemeinheit ihrer Semantik drückt sich nun unter anderem darin aus, daß Prinzipien wie die Notwendigkeit der Identität,

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \supset \Box(\mathbf{a} = \mathbf{b})$$

die zum Beispiel von Kripke in "Naming and Necessity" verteidigt wurde [Kripke 1972] oder die Barcan–Formel, nicht allgemeingültig sind. Auch verzichten sie auf die Forderung, daß kein Gegenstandsbereich leer ist, so daß das Schema

$$\forall x A(x) \supset \exists x A(x)$$

nicht gültig ist. Interessanterweise lassen sich jedoch die Quantorenregeln der „free logic“ nachweisen. Eine für Anwendungen in der Sprachphilosophie oder der Linguistik recht vielversprechend erscheinende Möglichkeit dieses Systems besteht zum Beispiel darin, daß Konstantensymbole als '*partiell starr*' interpretiert werden können.[9]

Ein einflußreiches philosophisch motiviertes Modellkonzept schließlich liegt in David Lewis' *Counterpart–Theorie* (vgl. [Lewis 1968]) vor, worauf Gideon Rosens Theorie des *modalen Fiktionalismus* (vgl. [Rosen 1990]) aufbaut, welche versucht, die wesentlichen Strukturen der Counterpart–Theorie zu übernehmen, ohne ihre ontologischen Verpflichtungen einzugehen.

3.2 Bereicherung der Syntax: Fittings Abstraktionsprinzip

Die Möglichkeiten die Syntax zu bereichern sind im Prinzip natürlich nahezu unbeschränkt. Zu den 'beliebtesten' solcher Maßnahmen zählen die Einführung eines *Existenzprädikates*, eines *Aktualitätsoperators* sowie beliebig vieler *modaler Operatoren*, die auf geeignete Weise indiziert und interpretiert werden. Hierzu vielleicht ein kurzes Beispiel. Wie man leicht einsieht ist ein natürlich–sprachlicher Satz wie „Es hätte einen Gegenstand geben können, welcher sich von allen tatsächlichen Gegenständen unterscheidet" in der üblichen Syntax nicht formalisierbar. Führt man jedoch ein Existenzprädikat $E!$, sowie einen Aktualitätsoperator $\mathcal{A}$ ein, so läßt sich der obige Satz wie folgt ausdrücken:[10]

$$\Diamond(\exists x)\neg\mathcal{A}E!(x)$$

Eine m.E. recht einträgliche Erweiterung der Syntax sei etwas ausführlicher besprochen. Melvin Fitting hat in einer Reihe von Arbeiten[11] ein Konzept weiterentwickelt, welches auf Stalnaker und Thomason zurückgeht[12] und Gebrauch von der sogenannten „*predicate abstraction*" macht. Dabei geht er von folgendem Problem aus: Ist eine Formel der Gestalt $\Box\phi(c)$ gegeben, wobei c ein Konstantensymbol ist, so ist die Formel auf zweifache Weise — korrespondierend mit einer extensionalen bzw. intensionalen Deutung der Konstanten[13] — interpretierbar (vgl. [Friedrichsdorf 1992], S. 260). Man kann verlangen, daß sie

[9] Man denke zum Beispiel an eine Konstante l, welche den „Finanzminister der Bundesrepublik Deutschland" in einem *zeitlogischen* System bezeichne. Dann scheint es durchaus vernünftig anzunehmen, daß die Konstante l für eine gewisse Zeit starr denotiert (sagen wir 135 Tage), machmal nicht denotiert (vielleicht eine Woche) und sich schließlich auf einen neuen Gegenstand (d.h. eine Person) bezieht.

[10] Dieses Beispiel steht in Zusammenhang mit einem von Plantinga [Plantinga 1974] und Konyndyk [Konyndyk 1986] vorgetragenen ontologischen Einwand, daß nämlich die Standard–Interpretation der modalen Sprache die Existenz von fiktionalen, nicht–aktualen Gegenständen impliziere. Dies widerspricht verschiedenen Spielarten des modalen Aktualismus. Man beachte, daß $(\exists x)\neg\mathcal{A}E(x)$ in einer Welt w wahr ist, falls in w ein Gegenstand **a** existiert, welcher *nicht* in der 'wirklichen' Welt w^* vorkommt. Für Details konsultiere man [Chihara 1998], insbesondere S. 22–36.

[11] Siehe etwa [Fitting 1991, Fitting 1998].

[12] Siehe [Stalnaker/Thomason 1968a] und [Stalnaker/Thomason 1968b].

[13] Die Unterscheidung extensional/intensional geht auf Rudolf Carnap (vgl. [Carnap 1947]) zurück. Die Fähigkeit modaler Sprachen zwischen Intensionen und Extensionen zu differenzieren ist ein Grund dafür, daß sie häufig auch als intensionale Sprachen bezeichnet werden. Die Sprache des klassischen Prädikatenkalküls wird dementsprechend als extensionale Sprache bezeichnet.

in der Welt w wahr ist, falls c in w interpretiert wird und $\phi(c)$ in allen Welten gilt, die von w aus erreichbar sind (extensionale Deutung).[14] Andererseits kann man die Formel auch so verstehen, daß sie wahr ist in w, wenn $\phi(c)$ wahr ist in jeder erreichbaren Welt v, wobei diesmal c in v interpretiert wird (intensionale Deutung). Beide Möglichkeiten entsprechen aber gewissen intendierten Interpretationen und stimmen lediglich dann überein, wenn wir von starr referierenden Konstantensymbolen ausgehen.[15]

Interessanterweise führt der Versuch, das Konzept der Skolemisierung in die quantifizierte Modallogik einzubringen, unmittelbar auf die Forderung nach Zulassung *nicht–starr* referierender Konstanten. Wollen wir nämlich den Existenzquantor in $\Box(\exists x)\phi(x)$ eliminieren, so müssen wir im allgemeinen davon ausgehen, daß wir in verschiedenen Welten verschiedene Gegenstände wählen müssen. Die ‘skolemisierte’ Formel $\Box\phi(c)$ enthält dann eine nicht–starr referierende Konstante. Zudem scheinen wir, wenn wir die Formeln $(\exists x)\Box\phi(x)$ und $\Box(\exists x)\phi(x)$ skolemisieren wollen, in beiden Fällen dieselbe Formel, $\Box\phi(c)$, zu erhalten.

Fittings Vorschlag läuft nun im wesentlichen darauf hinaus, die Formel $\Box\phi(c)$ auf zweifache Weise — korrespondierend mit den zwei Varianten der Skolemisierung — lesbar zu machen, und zwar mit einer syntaktischen Vorschrift, welche gewissermaßen den ‘*Wirkungsbereich*’ eines Terms festlegt. Formal bereichert er die Menge der Formeln — ähnlich wie im Lambda–Kalkül — durch folgende Vorschrift:

- Ist ϕ eine Formel, x eine Variable und t ein Term, so ist der Ausdruck $(\lambda x.\phi)(t)$ eine Formel.

Den beiden obigen Interpretationen von $\Box\phi(c)$ entsprechen nun die syntaktisch verschiedenen Formeln $\Box(\lambda x.\phi(x))(c)$ und $(\lambda x.\Box\phi(x))(c)$. Die erste Formel interpretiert man so, daß sie besagt, daß c die ‘Eigenschaft’ $\phi(x)$ *notwendig* hat. Dabei darf c in jeder Welt verschieden interpretiert werden, c ist im Wirkungsbereich der ‘Box’. Die Zweite hingegen behauptet, daß c eine gewisse Eigenschaft, ‘notwendigerweise ϕ’, hat. Hier geht man davon aus, das die Referenz von c von Welt zu Welt konstant bleibt. Auf der semantischen Ebene wird dies nun realisiert, indem man zu den üblichen Klauseln der Erfüllungsbeziehung in der Standard–Kripke–Semantik die folgende Wahrheitsbedingung hinzufügt:

- Ist $\mathfrak{M}$ ein Modell, ξ eine Belegung der Variablen, w eine Welt und bezeichnet $\mathbf{a} = \xi(t, w)$ die Interpretation des Terms t in w, so definiert man:[16]

$$\langle \mathfrak{M}, \xi \rangle \models (\lambda x.\phi)(t)[\xi] \quad \mathbf{gdw} \quad \langle \mathfrak{M}, \xi \rangle \models \phi[\xi[^{\mathbf{a}}_{x}]]$$

Mit diesem formalen Apparat lassen sich nun verschiedene Probleme auf elegante Weise behandeln. Das Prinzip der Notwendigkeit der Identität

$$(\mathbf{a} = \mathbf{b}) \supset \Box(\mathbf{a} = \mathbf{b})$$

[14] Dies verlangt offenbar die Monotonie–Bedingung.

[15] Man betrachte etwa die beiden folgenden Beispielsätze: „The President of the United States someday won’t be the President of the United States.“ und „The President of the United States might not have been Bill Clinton.“.

[16] Hierbei steht $\xi[^{\mathbf{a}}_{x}]$ für diejenige Belegung, die x mit $\mathbf{a}$ belegt und ansonsten mit ξ übereinstimmt.

zerfällt z.B. — wie oben angedeutet — in zwei Versionen. Dies ermöglicht eine subtilere Behandlung des Problems der Substitution, was unter anderem eine zufriedenstellende Formalisierung des 'Morgenstern/Abendstern'– Problems ermöglicht. Darüberhinaus läßt sich nun sowohl Russells Theorie der *Kennzeichnungen* auf modale Kontexte ausdehnen wie auch — dies ausnutzend — das Reden über *fiktionale Gegenstände* auf gewinnbringende Weise formalisieren. Ausführliche Diskussionen der philosophischen Anwendungen findet man in [Fitting/Mendelsohn 1998].

3.3 Zur Individuierung von Gegenständen und Eigenschaften

Kommen wir an dieser Stelle noch einmal auf „Pierre's Puzzle" zu sprechen.[17] Hier geht es um *inkonsistente Glaubensinhalte*. Der kleine Pierre referiert auf die Stadt London sowohl mit dem englischen „London" wie auch mit dem französischen „Londres", wobei er mit den assoziierten Orten — die, wie er *glaubt*, nicht identisch sind — völlig verschiedene Eigenschaften verbindet. Dies kollidiert nun mit dem von Kripke verteidigten Prinzip der *Notwendigkeit der Identität*[18] bzw., falls man dies akzeptiert, mit dem Leibnizschen Prinzip der „Ununterscheidbarkeit von Identischem", von welchem Kripke in "Naming and Necessity" sagt:

> Already when I worked on modal logic it had seemed to me [...] that the Leibnitzian[!] principle of the indiscernibility of identicals was as self–evident as the law of contradiction. That some philosophers could have doubted it always seemed to me bizzare. [Kripke 1972], S. 3.

Folgerichtig ist dieses Problem in der klassischen Semantik — zumindest wie Kripke sie versteht — nicht interpretierbar. Gibt man jedoch die *Funktionalität* von Gegenstückrelationen auf — wie dies schon David Lewis tat und in verallgemeinerten Kripke–Typ Semantiken möglich ist — so können *einem* Gegenstand zwei *verschiedene* Gegenstücke in einer anderen ‚möglichen Welt' entsprechen. Diese würden dort mit ihren verschiedenen Eigenschaften ‚friedlich' koexistieren, und Konsistenz und Leibniz' Prinzip wären ‚gerettet'. Mit anderen Worten, solche inkonsistenten Glaubensinhalte können in verallgemeinerten Kripke–Semantiken relativ problemlos modelliert werden.

Zwischen Theorien der Identität und Verallgemeinerungen der klassischen Semantik besteht also ein direkter Zusammenhang. Demzufolge induziert die klassische Kripke–Semantik eine sehr einfache und, wie oft behauptet wird, „natürliche" Theorie der Identität. Jedoch ist gleichzeitig der Begriff des Individuums, der dieser Semantik zugrunde liegt, hochgradig statisch und trivialisiert. In diesem Zusammenhang wäre nun z.B. eine genaue inhaltliche Klärung der (algebraischen) Bedingungen an Transformationen zwischen ‚abstrakten' n–Tupeln

[17] Dies ist ein in der philosophischen Literatur ausführlich diskutiertes Problem der 'Glaubens–Zuschreibung' und geht auf Saul Kripkes Aufsatz „A Puzzle About Belief" zurück (siehe [Kripke 1979]). Die hier gegebene Darstellung beansprucht jedoch nicht, die ganze philosophische Komplexität des Problems widerzuspiegeln.

[18] Allerdings nur, falls man auch Kripkes Forderung akzeptiert, daß *Namen* starr referieren.

— wie sie die Metaframe–Semantik vorschreibt (vergleiche Kapitel 5) — zu erbringen, um aufzuklären, inwiefern verallgemeinerte Semantiken diesen ‚statischen' Individuenbegriff überschreiten. In der klassischen Semantik ist ein Gegenstand eine ‚bloße Hülle', der in jeder möglichen Welt beliebige Eigenschaften übergestülpt werden können. Dies war auch einer der Quineschen Einwände gegen die quantifizierte Modallogik, zu dessen Kritik abschließend noch kurz Stellung genommen werden soll.

Wie Fitting und Mendelsohn in [Fitting/Mendelsohn 1998] bemerken, beruhen die Zweifel an der Möglichkeit quantifizierter Modallogik in der Regel auf der fehlenden Einsicht, wie verschiedene mögliche Lesarten bezüglich der *de re* und *de dicto* Unterscheidung von Notwendigkeit zu realisieren sind. Nach Quines Auffassung ist es nicht kohärent möglich, Gegenständen — unabhängig davon, wie wir auf sie referieren — notwendige oder kontingente Eigenschaften zuzuweisen. Er sagt in [Quine 1961], S. 148:

> Being necessarily or possibly thus and so is in general not a trait of the object concerned, but depends on the manner of referring to the object.

In „Three Grades of Modal Involvement" [Quine 1953] unterscheidet Quine drei Lesarten von „Notwendigkeit". Auf der ersten — unproblematischen — Ebene wird „$\Box$" als metalinguistisches Prädikat verstanden. Auf der zweiten Stufe ist „$\Box$" ein *Satzoperator* wie die Negation, der auf Formeln ohne freie Variablen angewandt wird. (Diese Interpretation benutzt man etwa in der Regel in der modalen Aussagenlogik.) Auf der dritten Stufe schließlich darf „$\Box$" auf Formeln mit freien Variablen angewandt werden — wie etwa in „$\Box(x \geq 7)$" —, und dies ist das Niveau, das für die Kombination mit Quantoren erforderlich ist. An dieser Stelle konkretisiert Quine auch einen seiner Einwände gegen die quantifizierte Modallogik. Der Satz „$9 \geq 7$" scheint notwendig, wohingegen der Satz „ ‚Die Anzahl der Planeten' ≥ 7" lediglich kontingent zu sein scheint, während wir doch in beiden Fällen über denselben Gegenstand, die Zahl 9, reden. Folgt man hierin Quine, so erscheint das Quantifizieren in intensionale Kontexte unmöglich. Ohne hier näher ins Detail gehen zu können, sei nur angedeutet, wie solche Probleme durch eine geeignete de re/de dicto–Unterscheidung aufgelöst werden können. Kürzen wir den Term „Die Anzahl der Planeten" durch „t" ab und nutzen den oben eingeführten Lambda–Operator, so ergeben sich zwei syntaktisch unterschiedliche Formalisierungen:

- $\langle \lambda x.\Box(x \geq 7)\rangle(t)$ bzw.
- $\Box\langle \lambda x.x \geq 7\rangle(t)$

Die erste ist eine de re Formalisierung und besagt, daß die Anzahl der Planeten, d. i. die Zahl 9, notwendigerweise größer oder gleich 7 ist. Dies nehmen wir als wahr an. Die zweite hingegen — eine de dicto Formalisierung — behauptet, daß es *notwendig ist, daß* die Anzahl der Planeten größer oder gleich 7 ist. Aber die Welt hätte anders aussehen können; folglich nehmen wir dies als falsch an.

4 Die Funktor–Semantik

Die Funktor–Semantik, die Silvio Ghilardi in seiner Arbeit [Ghilardi 1989] eingeführt hat, soll hier nur in aller Kürze definiert werden, um einen direkten Vergleich mit der in Kapitel 7 vorgestellten Semantik zu erlauben. Hierzu bedienen wir uns der Präsentation der Semantik, wie sie in [Skvortsov/Shehtman 1993] zu finden ist.

Sei $\mathcal{C} = \langle Ob_{\mathcal{C}}, Mor_{\mathcal{C}} \rangle$ eine *kleine* Kategorie, d.h. die Klassen $Ob_{\mathcal{C}}$ und $Mor_{\mathcal{C}}$ der Objekte bzw. Morphismen von $\mathcal{C}$ seien Mengen (keine echten Klassen). Jede solche kleine Kategorie besitzt eine Frame–Repräsentation $\mathcal{F} = \langle \mathcal{W}, \leq \rangle$, indem man $\mathcal{W} := Ob_{\mathcal{C}}$ definiert und für Elemente $u, v \in \mathcal{W}$ festsetzt:

$$u \leq v :\Longleftrightarrow \mathcal{C}(u, v) \neq \emptyset,$$

wobei $\mathcal{C}(u, v)$ die Menge aller Morphismen in $Mor_{\mathcal{C}}$ von u nach v bezeichne. Eine $\mathcal{C}$–Menge ist dann ein mengenwertiger Funktor über $\mathcal{C}$. Das heißt eine $\mathcal{C}$–Menge über einer kleinen Kategorie $\mathcal{C}$ wird definiert als ein Tripel $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{F}, \mathcal{D}, \mathcal{E} \rangle$, wobei $\mathcal{D} = (D_u)_{u \in \mathcal{F}}$ eine Familie nicht–leerer disjunkter Mengen sei und $\mathcal{E} = (E_\mu)_{\mu \in Mor_{\mathcal{C}}}$ eine durch Morphismen aus $\mathcal{C}$ indizierte Familie von Funktionen, so daß $E_\mu : D_u \longrightarrow D_v$ eine Funktion mit Definitionsbereich D_u und Bildbereich D_v ist, falls $\mu \in \mathcal{C}(u, v)$ ist. Zusätzlich fordert man $E_{\mu \circ \nu} = E_\mu \circ E_\nu$ sowie $E_{id_\mu} = id_{D_\mu}$.

Elemente $u \in \mathcal{W}$ faßt man als mögliche Welten auf und dementsprechend die Menge D_u als Individuenbereich der Welt u. Eine Interpretation in eine $\mathcal{C}$–Menge sei eine Abbildung $\mathcal{I}$, die jedem n–stelligen Relationssymbol P und jeder möglichen Welt u eine Teilmenge des n–dimensionalen kartesischen Produkts von D_u zuordnet. Schließlich sei ein $\mathcal{C}$–Modell definiert als ein Tripel $\langle \mathcal{C}, \mathfrak{F}, \mathcal{I} \rangle$. Ist nun eine Belegung β_u der Variablen in den Gegenstandsbereich D_u der Welt u gegeben, so definiert man die Erfüllungsbeziehung $\models$ wie folgt:

(a) $\beta_u \not\models \bot$

(b) $\beta_u \models R(y_1, \ldots, y_n) :\Longleftrightarrow \langle \beta_u(y_1), \ldots, \beta_u(y_n) \rangle \in \mathcal{I}_u(R)$.

(c) $\beta_u \models \neg\phi :\Longleftrightarrow \beta_u \not\models \phi$.

(d) $\beta_u \models \phi \wedge \psi :\Longleftrightarrow \beta_u \models \phi$ und $\beta_u \models \psi$.

(e) $\beta_u \models \Box\phi(y_1, \ldots, y_n) :\Longleftrightarrow$ für alle $v \in \mathcal{W}$ und alle $E_\mu : D_u \longrightarrow D_v$ gilt $E_\mu \circ \beta_u \models \phi(y_1, \ldots, y_n)$.

(f) $\beta_u \models \Diamond\phi(y_1, \ldots, y_n) :\Longleftrightarrow$ es gibt ein $v \in \mathcal{W}$ und ein $E_\mu : D_u \longrightarrow D_v$, so daß $E_\mu \circ \beta_u \models \phi(y_1, \ldots, y_n)$.

(g) $\beta_u \models \forall x\phi(x) :\Longleftrightarrow$ für alle $\mathbf{a} \in D_u$ gilt $\beta_x^{\mathbf{a}} \models \phi(x)$.

(h) $\beta_u \models \exists x\phi(x) :\Longleftrightarrow$ es gibt ein $\mathbf{a} \in D_u$, so daß $\beta_x^{\mathbf{a}} \models \phi(x)$.

An diesen Definitionen ist bereits ersichtlich, daß die Semantik — so formuliert — für Erweiterungen von **S4** maßgeschneidert ist. Andererseits dürfte klar sein, daß sich die Forderungen nach der Existenz identischer Abbildungen bzw. 'Kompositionsabbildungen' problemlos auch eliminieren lassen, was einen lediglich dazu zwingt, die Formulierung in kategorieller Sprache aufzugeben.

Es wurde schon erwähnt, daß die Funktor–Semantik allgemeiner ist als alternative Semantiken, wie Kripke sheaves und Kripke bundles, weshalb wir darauf verzichten wollen diese näher zu besprechen. Gleichfalls wurde schon darauf hingewiesen, daß sich die Funktor–Semantik insbesondere als Werkzeug bewährt hat, weitreichende Unvollständigkeitsresultate bzgl. der klassischen Kripke–Semantik zu erhalten. Ein typisches Resultat, [Ghilardi 1991] entnommen, lautet wie folgt. Dabei stehe für eine modale Aussagenlogik $\mathfrak{L}$ der Ausdruck $Q\mathfrak{L}$ für diejenige modale Prädikatenlogik, die auf die übliche Weise aus einer Kombination der Logik $\mathfrak{L}$ und klassischer Prädikatenlogik hervorgeht.

Satz 4.1 (Ghilardi 1991) *Sei $\mathfrak{L} \supset$ **S4** eine Erweiterung der modalen Aussagenlogik **S4**. Ist $Q\mathfrak{L}$ vollständig bzgl. einer Klasse von Kripke–Frames, so gilt entweder $\mathfrak{L} \supset$ **S5** oder $\mathfrak{L} \subset$ **S4.3**.*

Vollständigkeitsresultate sind hingegen recht rar gesäht. So weiß man von der Frame–Vollständigkeit der Logiken **QS4**, **QS.4.2**, **QS4.3** sowie aller Logiken $Q\mathfrak{L}$, falls $\mathfrak{L} \supset$ **S5** eine Erweiterung von **S5** ist (Kripke, Ghilardi, Corsi). In der Tat konnte man noch zu Beginn der 1980er Jahre die folgende Vermutung äußern, welche jedoch bereits in [Ono 1983] widerlegt werden konnte:

> Whenever a propositional modal logic $\mathfrak{L}$ is complete with respect to a certain class of frames, its canonical predicate-logical version $Q\mathfrak{L}$ as defined above will be complete with respect to some class of inhabited frames. [Hughes/Cresswell 1984]

Eine ansprechende Diskussion des Zusammenhangs zwischen Standard–Kripke–Semantiken und 'funktionalen' Semantiken im Stil der Funktor–Semantik findet man in [van Benthem 1993]. Schließlich diskutiert Giovanna Cepparello 'funktionale' Semantiken aus einer verstärkt philosophischen Perspektive in [Cepparello 1991a].

5 Metaframes: Mathematische Aspekte

In diesem Abschnitt möchte ich die Metaframe–Semantik in ihren technischen Aspekten skizzieren. Dabei werden der definitorische Teil in einiger Ausführlichkeit, die Folgerungen und mathematischen Resultate skizzenhaft und ohne Beweise präsentiert.[19] Wir folgen hier Skvortsov und Shehtman, indem wir zunächst nur Erweiterungen der quantifizierten Logik **S4** behandeln. Diese wird mit **QS4** bezeichnet. Die Übertragung der Ergebnisse auf andere Logiken scheint aber durchaus möglich zu sein. Insbesondere ist offenbar eine Ausdehnung auf Erweiterungen von **K** problemlos.

5.1 Metaframes

Im folgenden stelle ich die wichtigsten Begriffe und Definitionen zur Verfügung, die im weiteren zugrunde gelegt werden. Es seien $Var = \{v_1, v_2, \ldots\}$ eine abzählbare Menge von Variablen und — für ein beliebiges $m \geq 0$ — $PL^m = \{F_1^m, F_2^m, \ldots\}$ eine abzählbare Menge m–stelliger Prädikatensymbole respektive. 0–stellige Prädikatensymbole spielen hierbei die Rolle von Aussagenvariablen. Man beachte, daß eine rein relationale Signatur keine wirkliche Beschränkung bedeutet. Funktions- und Konstantensymbole können definitorisch 'simuliert' werden. *Atomare Formeln* sind von der Gestalt $P^m(x_1, \ldots, x_m)$, wobei $P^m \in PL^m$ und die x_i Variablen aus *Var* sind. Betrachten wir Logiken mit Identität, so gehören zu den atomaren Formeln außerdem alle Formeln der Gestalt $x \doteq y$. In der üblichen Weise werden die *modalen Formeln* aus den logischen Konstanten $\perp, \rightarrow, \Diamond$ und $\exists$ aufgebaut, andere logische Konstanten definitorisch eingeführt. Die Ausdrücke AF, MF und $MF^{\doteq}$ bezeichnen nun respektive die Mengen der atomaren, modalen und modalen Formeln mit Identität. Mit $(\bar{y}/\bar{x})A$ bezeichnen wir wie üblich die simultane Ersetzung aller freien Vorkommen der x_i in A durch y_i unter Beachtung der Konventionen bezüglich Variablenkollision. Schließlich ist eine *zweitstufige Substitutionsinstanz* $(C/P^n(\bar{x}))A$ von A gegeben durch die Ersetzung jeden Vorkommens von $P^n(\bar{y})$ in A durch $(\bar{y}/\bar{x})C$, wobei C eine modale Formel mit den freien Variablen $\bar{x}$ ist und möglicherweise gebundene Variablen umbenannt werden müssen. Eine modale Prädikatenlogik wird dann wie folgt definiert:

Definition 5.1 *Eine* modale Prädikatenlogik *(mit oder ohne Identität) ist eine Menge $\mathcal{L} \subseteq MF^{(\doteq)}$ von Formeln , welche alle Axiome des klassischen Prädikatenkalküls (mit oder ohne Identität) sowie der* **S4***–Logik enthält und abgeschlossen ist unter Modus Ponens $(A, A \rightarrow B \mid B)$, Generalisierung $(A \mid \forall x A)$, zweitstufiger Substitution (ist A in $\mathcal{L}$ so auch alle zweitstufigen Substitutionsinstanzen von A) und der Box–Regel $(A \mid \Box A)$.*

Ist uns eine modale Prädikatenlogik $\mathcal{L}$ gegeben, so bezeichnen wir mit $\mathcal{L}_P$ das *aussagenlogische Fragment* dieser Logik, welches einfach alle Formeln aus $\mathcal{L}$

[19] Dabei sind alle Resultate, wenn nichts Gegenteiliges erwähnt wird, aus der Arbeit [Skvortsov/Shehtman 1993] entnommen.

aussondert, die ausschließlich Aussagenvariablen (d.i. 0–stellige Prädikate) enthalten. Die Formelmenge $\mathcal{L}_P$ ist dann offensichtlich eine modale Aussagenlogik im gewöhnlichen Sinne. Eine letzte Definition wird von Bedeutung sein. Mit $A^{[m]}$ bezeichnen wir die Formel, welche aus A dadurch entsteht, daß wir jedes Vorkommen einer atomaren Formel der Form $P^k(\bar{x})$ durch die entsprechende $(k+m)$–stellige atomare Formel $P^{k+m}(\bar{x}, \bar{z})$ ersetzen, wobei die z_i nicht in A vorkommen dürfen.

5.1.1 Die Standard Semantik

Um die 'Eigenarten' der Metaframe–Semantik besser einsehen zu können, sei noch kurz die klassische Kripke–Semantik angegeben. Dort ist ein prädikatenlogisches Kripke–Frame definiert als ein Tripel $\mathcal{F} = (F, \leq, \mathcal{D})$, wobei $(F, \leq)$ ein aussagenlogisches Frame ist und $\mathcal{D} = (D_u)_{u \in F}$ eine Familie von Gegenstandsbereichen, indiziert durch die 'Welten' u aus F. Wie oben erwähnt, sind an dieser Stelle nun für gewöhnlich einige Entscheidungen zu treffen hinsichtlich der Interpretation der Prädikate, der Wahl der Gegenstandsbereiche etc. Der Einfachheit halber begnügen wir uns hier mit einer einfachen Version. Eine Interpretation ξ in $\mathcal{F}$ sei eine Abbildung, welche jedem m–stelligen Prädikatensymbol P^m und jeder Welt $u \in F$ eine Teilmenge des m–stelligen kartesischen Produkts von D_u zuordnet, kurz $\xi_u(P^m) \subseteq (D_u)^m$.[20] Prädikate können in der Welt u also *nicht* auf Gegenstände zutreffen, die in u nicht existieren (bloß *mögliche* Objekte sind). Ferner erfülle die Familie $\mathcal{D}$ von Gegenstandsbereichen die Monotoniebedingung aus Kapitel 2. Die Erfüllungsbeziehung ist dann für Formeln in der erweiterten Sprache $\mathbb{L}_{D_u}$[21] bezüglich einer Welt u und einer Interpretation ξ in der üblichen Weise wie folgt definiert:

(a) $\langle \xi, u \rangle \models P^0$ **gdw** $u \in \xi_u(P^0)$.

(b) $\langle \xi, u \rangle \not\models \bot$.

(c) $\langle \xi, u \rangle \models B \to C$ **gdw** $\langle \xi, u \rangle \not\models B$ oder $\langle \xi, u \rangle \models C$.

(d) $\langle \xi, u \rangle \models \Diamond B$ **gdw** es ein v in $\mathcal{F}$ gibt mit $v \geq u$ und $\langle \xi, v \rangle \models B$.

(e) $\langle \xi, u \rangle \models P^m(a)$ **gdw** $\mathbf{a} \in \xi_u(P^m)$ für jedes $m \geq 0$ und $\mathbf{a} \in (\mathcal{D}_{(u)})^m$.

(f) $\langle \xi, u \rangle \models a \doteq b$ **gdw** $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ in $D_{(u)}$.

(g) $\langle \xi, u \rangle \models \exists x A$ **gdw** es ein $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_{(u)}$ gibt, mit $\langle \xi, u \rangle \models (a/x)A$.

Die Formel A heißt dann *wahr bzgl. ξ*, falls für alle $u \in F$: $\langle \xi, u \rangle \models [\forall]A$ gilt.[22] Schließlich sagt man, daß A *allgemeingültig* in $\mathcal{F}$ ist, falls A bzgl. jeder Interpretation ξ in $\mathcal{F}$ wahr ist. Die Menge aller allgemeingültigen Formeln in einem gegebenen Frame bildet dann eine modale Prädikatenlogik. Insbesondere heißt

[20] Um den Fall der 0–stelligen Prädikate, d.h. der Aussagenvariablen, abzudecken, vereinbart man zusätzlich: $\xi_u(P^0) \subseteq \{u\}$.

[21] Die erweiterte Sprache $\mathbb{L}_{D_u}$ geht dabei aus $\mathbb{L}$ hervor, indem für jedes Element $\mathbf{a}$ aus D_u eine neue Konstante a in die Sprache aufgenommen wird.

[22] Dabei bezeichnet $[\forall]A$ den universellen Abschluß von A.

eine modale Prädikatenlogik $\mathcal{L}$ *Kripke–vollständig*, falls sie durch eine Familie von Frames charakterisiert wird, d.h. falls $\mathcal{L} = \bigcap_{i \in I} ML^{(\doteq)}(\mathcal{F}_i)$ gilt. [23]

5.1.2 Metaframes definiert

Notationen
Zur Formulierung der Metaframe–Semantik müssen zunächst noch einige Begriffe und Notationen eingeführt werden. $\sum_0$ sei die Einschränkung der Kategorie $\mathcal{SET}$ von Mengen und Abbildung zwischen diesen auf die Menge ω von endlichen Ordinalzahlen. Wir nutzen eine isomorphe Kopie $\sum$ dieser Kategorie, deren Objekte von der Gestalt $I_1 = \{1\}$, $I_2 = \{1,2\}$, $I_3 = \{1,2,3\}$ etc. sind und deren Morphismen mengentheoretische Abbildungen zwischen diesen Objekten sind. Wir schreiben kurz m für I_m und bezeichnen mit $\sum(m,n)$ die Menge aller Abbildungen von m nach n. Weiter bezeichne $\sum^{inj.}(m,n)$ die Menge aller injektiven Abbildungen von m nach n. Man könnte auch schlichter sagen, $\sum$ sei die Menge der natürlichen Zahlen zusammen mit allen Abbildungen zwischen diesen.[24] Einige spezielle Notationen und Abbildungen aus $\sum(m,n)$ sind nun für die Formulierung der Erfüllungsbeziehung in der Metaframe–Semantik von besonderer Bedeutung.

Notation 5.1

- *Für eine beliebige Abbildung $\sigma \in \sum(m,n)$ sei die* minimale Ausdehnung $\sigma^+ \in \sum(m+1, n+1)$ *durch $\sigma^+(m+1) := n+1$ definiert. Es ist also $\sigma^+ |_m = \sigma$. Die Abbildung $j_n \in \sum(n-1,n)$ sei definiert als $j_n := id(n-1,n)$. Die (eindeutig bestimmte) 'leere' Abbildung von $\emptyset$ nach n sei mit λ_n bezeichnet. Man beachte, daß diese Abbildung per definitionem injektiv ist. Die Projektionsabbildung $pr_{n,i} \in \sum^{inj.}(1,n)$ sei zuletzt gegeben durch $pr_{n,i}(1) := i$.*

- *Für ein Variablen n–Tupel $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ definieren wir $\bar{x}_\sigma$ als das Variablen m–Tupel $(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)})$.*[25]

- *Ist $z \in Var$ eine Variable und $\bar{x}$ ein Variablen n–Tupel, so bezeichnet $\bar{x} - z$ dasjenige Variablentupel, welches aus $\bar{x}$ durch Löschung sämtlicher Vorkommen von z entsteht. Besteht also $\bar{x}$ aus n verschiedenen Variablen, so ist die Länge des Variablentupels $\bar{x} - z$ entweder $n-1$ oder n, je nachdem, ob z in $\bar{x}$ vorkommt oder nicht.*

- *$\bar{x} + z := (\bar{x} - z, z)$ sei dann dasjenige Variablentupel, welches aus $\bar{x} - z$ durch Anhängen von z entsteht.*

- *Schließlich wird die Länge des Variablentupels $\bar{x} + z$ von Bedeutung sein. Diese wird mit n' bezeichnet. Kommt z in $\bar{x}$ vor (wobei $\bar{x}$ aus distinkten Variablen bestehe), so ist $n' = n$, andernfalls $= n+1$.*

[23] $ML^{(\doteq)}(\mathcal{F}_i)$ bezeichnet die durch das Frame $\mathcal{F}_i$ bestimmte Logik.

[24] Die kategorielle Formulierung ist hier nicht von substantieller Bedeutung, sondern lediglich als abkürzende Sprachregelung aufzufassen.

[25] Die Abbildung σ 'wählt' also m der n Indizes aus $\bar{x}$ aus.

- *In dieser Notation gibt es also eine Abbildung $\sigma_{\bar{x}-z} \in \sum^{inj.}(n'-1,n)$, so daß $\bar{x}-z = \bar{x} \circ \sigma_{\bar{x}-z} = (\bar{x}+z) \circ j_{n'}$ gilt. Die Abbildung $\sigma_{\bar{x}-z}$ vollzieht also gerade die gewünschte Transformation des Variablentupels $\bar{x}$ zu $\bar{x}-z$.* [26]

Metaframes

Wir kommen nun zur Definition der Metaframes. Ein Metaframe wird definiert als ein Paar $\mathfrak{F} = (\mathcal{D}, \Pi)$, wobei $\mathcal{D} = (D_n, \leq_n)_{n\in\omega}$ eine (abzählbare) Folge von Frames sei und $\Pi = (\pi_\sigma)_{\sigma \in Mor \sum}$ eine Familie von Abbildungen indiziert durch Morphismen aus $\sum$, so daß $\pi_\sigma : D_n \longrightarrow D_m$ eine Abbildung von D_n nach D_m ist, falls $\sigma \in \sum(m,n)$ gilt. Man sagt dann, $\mathfrak{F}$ sei ein Metaframe über dem Frame $\mathcal{F}$, falls $\mathcal{F} = (D_0, \leq_0)$ gilt. Informell kann man $\mathcal{F}$ als Frame 'möglicher Welten' auffassen, D_n für $n \geq 1$ als 'n–dimensionalen Individuenbereich', die Relationen $\leq_n$ als Erreichbarkeitsrelationen zwischen 'abstrakten' n–dimensionalen Individuen und schließlich die Abbildungen π_σ als 'abstrakte Transformationen' zwischen n– und m–dimensionalen Objekten. Ist etwa $\mathbf{a}$ ein n–dimensionales Individuum aus D_n sowie $\sigma \in \sum(m,n)$, also π_σ eine Abbildung von D_n nach D_m, so bezeichnet $\pi_\sigma(\mathbf{a})$ ein Element aus D_m. Dies kürzen wir auch mit $\mathbf{a}_\sigma$ ab und sprechen von einer σ–*Transformation* von $\mathbf{a}$.

Wir können nun mit Hilfe der Projektionsabbildungen π_{λ_n} die Menge $D_{n,u}$ der n–dimensionalen Individuen in der Welt u definieren.[27] Man setze einfach $D_{n,u} := (\pi_{\lambda_n})^{-1}(u)$, so daß wir eine Zerlegung $D_n = \bigcup_{u\in\mathcal{F}} D_{n,u}$ des n–dimensionalen Individuenbereichs erhalten.

Die Erfüllungsbeziehung

Es verbleibt nun noch die Aufgabe anzugeben, wie die Gültigkeit einer modalen Formel A in einem Metaframe definiert sein soll. Eine *$\mathfrak{F}$–Formel der Stufe n* sei hierzu erklärt als ein Tripel $(\mathbf{a}, \bar{x}, A)$, wobei $\mathbf{a}$ ein Element aus D_n sei, $\bar{x}$ eine Folge distinkter Variablen, so daß $FV(A) \subseteq \bar{x}$ und schließlich A eine Formel, die höchstens n freie Variablen habe.[28] Eine *Interpretation* in einen Metaframe sei eine Abbildung ξ, welche jedem m–stelligen Prädikatensymbol P^m eine Teilmenge $\xi(P^m)$ des m–dimensionalen Individuenbereichs D_m zuordnet. Ein *Metaframe Modell* ist dann wie üblich definiert als ein Paar $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, \xi)$. Wir erklären nun allgemein die Gültigkeit einer $\mathfrak{F}$–Formel in einem solchen Modell. Ist insbesondere $n = 0$, so ist A eine Aussage und $\mathbf{a} \in D_0$ eine Welt aus $\mathcal{F}$.

1. $\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models P^m(\bar{x}_\sigma)[\bar{x}]$ **gdw** $\pi_\sigma(\mathbf{a}) \in \xi(P^m)$.

2. $\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \not\models \bot[\bar{x}]$.

3. $\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models (x_i \doteq x_j)[\bar{x}]$ **gdw** $\pi_{pr_{n,i}}(\mathbf{a}) = \pi_{pr_{n,j}}(\mathbf{a})$.

4. $\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models (B \to C)[\bar{x}]$ **gdw** $\xi, \mathbf{a} \not\models B[\bar{x}]$ oder $\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models C[\bar{x}]$.

[26] Genauer sieht die Abbildung $\sigma_{\bar{x}-z}$ wie folgt aus: Kommt z in $\bar{x}$ vor, ist also etwa $= x_i$, so ist $n' = n$ und $\sigma_{\bar{x}-z}(j) = j$ für $1 \leq j < i$ und $\sigma_{\bar{x}-z}(j) = j+1$ für $i \leq j \leq n-1$. Kommt z nicht in $\bar{x}$ vor, so ist $n' = n+1$ und $\sigma_{\bar{x}-z} = id(n)$.

[27] Man erinnere sich: Nach Definition ist $\lambda_n : I_0 \longrightarrow I_n$, so daß $\pi_{\lambda_n} : D_n \longrightarrow D_0$ gilt.

[28] Dabei steht die Bezeichnung $FV(A)$ für die Menge der freien Variablen von A.

5. $\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models \Diamond B[\bar{x}]$ **gdw** es ein $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_n$ gibt mit $\mathbf{a} \leq_n \mathbf{b}$ und $\langle \xi, \mathbf{b} \rangle \models B[\bar{x}]$.

6. $\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models \exists z B[\bar{x}]$ **gdw** es ein $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_{n'}$ gibt mit $\pi_{j_{n'}}(\mathbf{b}) = \pi_{\sigma_{\bar{x}-z}}(\mathbf{a})$, so daß $\langle \xi, \mathbf{b} \rangle \models B[\bar{x} + z]$.

Sei nun $\bar{x}$ eine Folge von n (verschiedenen) Variablen mit $FV(A) \subseteq \bar{x}$. Die Formel A heißt nun *wahr unter der Interpretation* ξ *bzgl.* $\bar{x}$ (*Notation:* $\xi \models A[\bar{x}]$), falls für jedes $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_n : \langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models A[\bar{x}]$ gilt. Eine modale Formel A heißt *allgemeingültig* in $\mathfrak{F}$ (*Notation:* $\mathfrak{F} \models A$) , falls für jedes Variablentupel $\bar{x} \subseteq FV(A)$ und jede Interpretation ξ in $\mathfrak{F}$, $\xi \models A[\bar{x}]$ gilt.

Wir definieren nun die Menge $ML^{(\doteq)\sharp}(\mathfrak{F}) := \{A \in MF^{(\doteq)} \mid \mathfrak{F} \models A\}$ aller modalen Formeln A, die in einem gegebenen Frame allgemeingültig sind, sowie die Menge $ML^{(\doteq)}(\mathfrak{F}) := \{A \in MF^{(\doteq)} \mid$ für alle $n \geq 0 : \mathfrak{F} \models A^{[n]}\}$. Offensichtlich gilt dann $ML^{(\doteq)}(\mathfrak{F}) \subseteq ML^{(\doteq)\sharp}(\mathfrak{F})$.

5.1.3 Korrektheit

Es stellt sich heraus, daß die so definierte Menge $ML^{(\doteq)\sharp}(\mathfrak{F})$ von modalen Formeln i.A. weder eine modale Prädikatenlogik im oben gegebenen Sinne bildet, noch eine Erweiterung der Logik **QS4** sein muß. Man kann z.B. einen Metaframe $\mathfrak{F}$ angeben, so daß $ML^{(\doteq)\sharp}(\mathfrak{F})$ nicht unter Substitutionen abgeschlossen ist. Um diesen Defekt der Semantik zu beheben, werden im nächsten Abschnitt drei logische Korrektheitsbedingungen an Metaframes formuliert. Man kann dann zeigen, daß sich diese Korrektheitsbedingungen äquivalent als algebraische Bedingungen an die Struktur der Metaframes formulieren lassen, d.h. ohne Bezugnahme auf Formeln oder Gültigkeit.

Logische Korrektheitsbedingungen

(I) *Logische Korrektheit:* $ML^{(\doteq)}(\mathfrak{F})$ ist eine modale Prädikatenlogik.

(II) *Wahrheitsinvarianz:* Für jede modale Formel $A \in MF^{(\doteq)}$ und jede Interpretation ξ in $\mathfrak{F}$ hängt der Wahrheitswert von $\xi \models A[\bar{x}]$ nicht von der Wahl von $\bar{x}$ ab, vorausgesetzt, daß $\bar{x} \supseteq FV(A)$ gilt.

(III) *Invarianz gegenüber Variablenumbenennung:* Für jede Formel A, jedes $\sigma \in \sum(m,n)$ und beliebige Folgen $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ und $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ von n bzw. m verschiedenen Variablen mit $FV(A) \subseteq \bar{y}$, sowie jede Interpretation ξ in $\mathfrak{F}$ und jedes $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_n$ gilt:

$$\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models (\bar{x}_\sigma \mid \bar{y}) A[\bar{x}] \textbf{ gdw } \langle \xi, \pi_\sigma(\mathbf{a}) \rangle \models A[\bar{y}].$$

Ein Spezialfall von (III) ist die folgende, in ihrer Bedeutung einfacher zu durchschauende Bedingung:

(III)$^\sharp$ *Invarianz der Gültigkeit:* Für jede Formel $A \in MF^{(\doteq)}$, jedes $\sigma \in \sum^{inj.}(m,n)$, jede beliebige Folge $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ von n verschiedenen Variablen mit $FV(A) \subseteq \bar{x}$, sowie jede Interpretation ξ in $\mathfrak{F}$ und jedes $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_n$ gilt:

$$\langle \xi, \mathbf{a} \rangle \models A[\bar{x}] \textbf{ gdw } \langle \xi, \pi_\sigma(\mathbf{a}) \rangle \models A[\bar{x}_\sigma].$$

Die Bedingung (I) ist offenbar eine notwendige Bedingung, um eine adäquate Semantik für die quantifizierte Modallogik zu erhalten, vorausgesetzt, man akzeptiert die oben gegebene Definition modaler Prädikatenlogiken. Die Bedingung (II) erlaubt es, die *Wahrheit* einer Formel unter einer Interpretation zu definieren. Tatsächlich kann bei einem *beliebigen* Metaframe die Gültigkeit einer Formel von dem gewählten Variablentupel $\bar{x}$ mit $FV(A) \subseteq \bar{x}$ abhängen! (III)$^\sharp$ besagt, daß die Gültigkeit einer Formel in einem 'Punkt' nicht vom gewählten Variablentupel abhängen soll. Man beachte, daß man — ändert man das Variablentupel $\bar{x}$ zu $\bar{x}_\sigma$ ab — die Formel A nunmehr statt in $\mathcal{D}_n$ in $\mathcal{D}_m$ interpretieren muß. Die für uns relevanten Metaframes werden also im folgenden ausschließlich *korrekte* Metaframes im obigen Sinne sein. Diese generieren die anvisierte (maximale) Kripke–Typ–Semantik. Wir nennen Metaframes, welche die Bedingungen (I) bis (III) erfüllen $M^{(\doteq)}$*–korrekte* Metaframes.

Algebraische Charakterisierung
Entscheidend ist nun, daß sich die logische Korrektheit äquivalent durch algebraische Bedingungen an Metaframes charakterisieren läßt. Wir nennen ein Metaframe $\mathfrak{F}$ *modal*, falls es die folgenden sechs Bedingungen erfüllt:

(0) $\pi_{\lambda_1}(\mathcal{D}_1) = \mathcal{F}$.

(1) Sei $\sigma \in \sum(m,n)$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathcal{D}_n$ beliebig. Dann gilt: Falls $\mathbf{a} \leq_n \mathbf{b}$, so $\pi_\sigma(\mathbf{a}) \leq_m \pi_\sigma(\mathbf{b})$.

(2) Seien $\sigma \in \sum(m,n)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_n$ und $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_m$. Falls $\pi_\sigma(\mathbf{a}) \leq_m \mathbf{c}$, so existiert ein $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_n$ mit $\mathbf{a} \leq_n \mathbf{b}$ sowie $\pi_\sigma(\mathbf{b}) = \mathbf{c}$.

(3) *Lift–Eigenschaft:* Seien $\sigma \in \sum(m,n)$, $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_n$ und $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_{m+1}$. Ist $\pi_\sigma(\mathbf{a}) = \pi_{j_{m+1}}(\mathbf{b}) = \mathbf{d} \in \mathcal{D}_m$, so existiert ein $\mathbf{c} \in \mathcal{D}_{n+1}$, so daß $\pi_{\sigma^+}(\mathbf{c}) = \mathbf{b}$ und $\pi_{j_{n+1}}(\mathbf{c}) = \mathbf{a}$.

(4) Seien $\sigma \in \sum(m,n)$ und $\tau \in \sum(k,m)$. Dann gilt: $\pi_{\sigma\circ\tau} = \pi_\tau \circ \pi_\sigma$.

(5) $\pi_{id(n)} = \mathbf{1}_{\mathcal{D}_n}$ (identische Abbildung).

Die Bedingungen (1) und (2) besagen, daß π_σ ein p–Morphismus[29] von $(\mathcal{D}_n, \leq_n)$ *auf* ein erzeugtes Subframe von $(\mathcal{D}_m, \leq_m)$ ist. Man beachte, daß dies *keine* sonderlich obskure Bedingung ist. Schließlich handelt es sich bei p–Morphismen um die einfachsten wahrheitserhaltenden Abbildungen. Wir ziehen zunächst einige Konsequenzen aus der obigen Definition, um deutlicher zu machen, welche Strukturen sie auferlegt. Aus (4) folgt zunächst, daß $\pi_{\lambda_n} = \pi_{\lambda_m} \circ \pi_\sigma$ für jedes σ aus $\sum(m,n)$ sowie aus (4) und (0) die Eigenschaften $\pi_{\lambda_n}(\mathcal{D}_n) = \mathcal{F}$ und $\bigcup_{n>0} \pi_{\lambda_n} = \mathcal{F}$. Tatsächlich ist die Bedingung (0), falls man (4) und (5) voraussetzt, äquivalent zu den beiden folgenden Aussagen:

(0)$^\flat$ $\bigcup_{n>0} \pi_{\lambda_n}(\mathcal{D}_n) = \mathcal{F}$

(6) Falls σ aus $\sum^{inj.}(m,n)$ ist, so gilt $\pi_\sigma(\mathcal{D}_n) = \mathcal{D}_m$.

[29]Für exakte Definitionen der Begriffe p–Morphismus, erzeugtes Subframe etc. konsultiere man z.B. [Kracht 1999] oder [Chagrov/Zakharyaschev 1997].

Grob gesagt gewährleisten uns diese Forderungen, daß sich die Abbildungen zwischen 'abstrakten' n–Tupeln gewissermaßen 'angenehm' verhalten. Es mag an dieser Stelle instruktiv sein zu sehen, welche Relevanz die verschiedenen Bedingungen zum Beispiel beim Nachweis der Korrektheitsbedingung (III)$^\sharp$ haben. Die sogenannte 'Lift–Eigenschaft' sichert hier die Existenz eines Individuums, welches im 'Quantorenschritt' des induktiven Beweises der Korrektheitsbedingung benötigt wird. Die Eigenschaft (4) wird bei der Behandlung der Prädikate eingesetzt, während (1) und (2) (p–Morphismus) im 'Box–Schritt' ausgenutzt werden.

Schließlich nennen wir ein m–Metaframe ein *modales Metaframe für die Gleichheit* (kurz: $m^{\doteq}$*–Metaframe*), falls zusätzlich zu (0) – (5) die Bedingung

(0)$^\sharp$ Seien $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ in $\mathcal{D}_n$ für ein $n \geq 0$. Falls dann $\pi_{pr_{n,i}}(\mathbf{a}) = \pi_{pr_{n,i}}(\mathbf{b})$ für alle $i \leq n$, so gilt $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

erfüllt ist. Der Zusammenhang zwischen logisch korrekten und modalen Metaframes wird nun in zwei Schritten hergestellt. Zunächst kann man zeigen, daß jedes modale Metaframe tatsächlich ein logisch korrektes Metaframe ist.

Satz 5.1 (Korrektheitssatz) *Jedes* $m^{(\doteq)}$*–Metaframe ist* $m^{(\doteq)}$*–korrekt.*

Dies rechtfertigt zunächst die obige Definition insofern, als wir nun durch ein einfaches Instrument — Nachprüfung einiger algebraischer Bedingungen — nachweisen können, daß ein gegebenes Metaframe tatsächlich eine modale Prädikatenlogik erzeugt. Andererseits ist es a priori nicht klar, ob logisch korrekte Metaframes nicht wesentlich allgemeiner sind. Der folgende Satz gewährleistet aber, daß nichts an Ausdruckskraft verloren geht.

Satz 5.2 (Maximalitätssatz) *Für jedes* $m^{(\doteq)}$*–korrekte Metaframe* $\mathfrak{F}$ *existiert ein* $m^{(\doteq)}$*–Metaframe* $\mathfrak{F}'$*, so daß* $ML^{(\doteq)}(\mathfrak{F}) = ML^{(\doteq)}(\mathfrak{F}')$*.*

Obwohl die uns interessierenden Metaframes also eigentlich die logisch korrekten sind, können wir uns bei semantischen Untersuchungen stets auf modale Metaframes zurückziehen, da wir zu jedem logisch korrekten Metaframe ein modales Metaframe angeben können, welches *logisch äquivalent* zu jenem ist. Eine weitere wichtige Konsequenz dieses Satzes ist, daß wir die logische Korrektheit einer beliebigen Semantik, welche in der Metaframe–Semantik interpretierbar ist, auf die Überprüfung einiger einfacher algebraischer Bedingungen zurückführen können.[30] Es wird aber zu untersuchen sein, inwiefern die angegebenen algebraischen Bedingungen bei konkreten Interpretationen quantifizierter modaler Formeln inhaltlich adäquat sind. Das folgende Lemma gibt noch einen kleinen Einblick in die genauere Funktionsweise der Semantik. Es besagt in etwa, daß n–stellige Prädikate im n–dimensionalen Gegenstandsbereich wie Aussagenvariablen behandelt werden.

Lemma 5.1 *Sei* $\mathfrak{F} = (\mathcal{D}, \Pi)$ *ein modales* m*–Metaframe. Ist dann* A *eine modale aussagenlogische Formel, so gilt für jedes* $n \geq 0$ *die folgende Äquivalenz:*

$$\mathfrak{F} \models A^{[n]} \ \ \textit{\textbf{gdw}} \ \ A \in ML_P(D_n, \leq_n)$$

[30]Dies wäre zum Beispiel für die Kripke–Bündel- oder Funktor–Semantik durchführbar.

5.2 Vollständigkeit in der Metaframe–Semantik

Bekanntlich ist die Konstruktion kanonischer Modelle in der modalen Aussagenlogik eine außerordentlich erfolgreiche Methode, die Vollständigkeit einer Logik nachzuweisen. Dabei werden Ultrafilter der Lindenbaum–Algebra als 'mögliche Welten' interpretiert. Im prädikatenlogischen Fall entsteht das Problem, auf algebraische Weise Individuen zu konstruieren. Auf einfache Weise ist dies nur in sehr seltenen Fällen möglich, etwa für die Logik **QS4**, wo man — den Henkin–Beweis der klassischen Logik imitierend — Individuen durch Einführung neuer Konstanten angibt. Im allgemeinen müssen jedoch recht komplizierte Konstruktionen durchgeführt werden, welche zudem nur für einige wenige Logiken zum Erfolg führen, wie man bei James W. Garson nachlesen kann, der vier solche Varianten vorführt [Garson 1984]. So setzt der Vollständigkeitsbeweis, den Thomason 1970 vorgeschlagen hat, z.B. konstante Gegenstandsbereiche, starr denotierende Terme, klassische Quantorenregeln sowie die Barcan–Formel voraus — sicherlich keine sonderlich schwachen Voraussetzungen [Thomason 1970]. Das Hauptproblem besteht aber im allgemeinen schlicht darin, daß bereits sehr einfache quantifizierte Modallogiken — ein Beispiel ist $\mathbf{QS4}^{\doteq}$ — Kripke–unvollständig sein können.[31]

In der Metaframe–Semantik wird dieses Problem nun dadurch überwunden, daß man n–dimensionale Individuen mit n–Typen identifiziert, ohne weitere zusätzliche Bedingungen an die Logik oder die Modelle zu stellen. Auf diese Weise wird die Methode der kanonischen Modelle ähnlich erfolgreich wie im aussagenlogischen Fall. Man beachte, daß n–Tupel von 1–Typen sicherlich *nicht* äquivalent zu n–Typen sind. Dies motiviert unter anderem die Begriffsbildung eines Metaframes, in welchem von 'abstrakten' n–Tupeln die Rede ist, die sich bis zu einem gewissen Grad wie 'wirkliche' n–Tupel verhalten.

5.2.1 Kanonische Modelle

Eine Formel A heißt *n–Formel*, falls $FV(A) \subseteq \{v_1, \ldots, v_n\}$. Eine Menge Δ von n–Formeln ist nun — genau wie in der klassischen Logik — ein *$\mathcal{L}$–n–Typ*, falls die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- Δ ist eine *$\mathcal{L}$–konsistente* Menge von Formeln.[32]
- Δ ist *maximal*, d.h. für jede modale n–Formel A gilt entweder $A \in \Delta$ oder $\neg A \in \Delta$.

Mit anderen Worten, Δ ist eine maximal konsistente Formelmenge, deren freie Variablen unter $\{v_1, \ldots, v_n\}$ vorkommen. Das Lemma von Lindenbaum gilt in diesem Kontext, völlig analog wie in der klassischen Prädikatenlogik.

Lemma 5.2 (Lindenbaum) *Jede $\mathcal{L}$–konsistente Menge von n–Formeln läßt sich zu einer maximal–konsistenten Menge erweitern.*

[31] In manchen Fällen kann man eine Kripke–unvollständige Logik durch Hinzunahme geeigneter Formeln auch vervollständigen. Siehe hierzu [Cresswell 2000] sowie [Hughes/Cresswell 1996].

[32] $\mathcal{L}$–Konsistenz ist hier wie folgt erklärt: Sind endliche viele Formeln $A_1, \ldots, A_m \in \Delta$ gegeben, so gilt $\neg(\bigwedge_{1 \leq i \leq m} A_i) \notin \mathcal{L}$.

Das folgende Lemma gibt an, daß wir mit Hilfe unserer Transformationen $\sigma \in \sum(m,n)$ von einem n–Typ Δ zu einem m–Typ $\Gamma = \Delta_\sigma$ übergehen können. Dazu sei Δ_σ zunächst definiert als die Formelmenge:

$$\{A \mid \text{ A ist eine modale } m\text{–Formel und } (v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(m)}/v_1,\ldots,v_m)A \in \Delta\}$$

Lemma 5.3 *Sei Δ ein $\mathfrak{L}$–n–Typ und $\sigma \in \sum(m,n)$ eine Transformation. Dann ist die Menge Δ_σ ein $\mathfrak{L}$–m–Typ.*

Wir definieren nun die Begriffe des kanonischen Metaframes und des kanonischen Metaframe–Modells. Sei dazu zunächst die Menge $\mathcal{D}_{\mathfrak{L},n}$ definiert als die Menge aller $\mathfrak{L}$–n–Typen. Auf dieser Menge wird dann eine Erreichbarkeitsrelation zwischen n–Typen auf folgende Weise definiert:

$$\Delta \leq_{\mathfrak{L},n} \Gamma \;\text{ gdw }\; \text{ für alle Formeln } A \text{ gilt: Falls } \Box A \in \Delta, \text{ so } A \in \Gamma$$

Ein einfacher Beweis zeigt nun, daß, falls die Erreichbarkeitsrelation reflexiv und transitiv war, dies auch für die Relation $\leq_{\mathfrak{L},n}$ gilt.

Definition 5.2 *Das* kanonische Metaframe $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} = (\mathcal{D}_{\mathfrak{L}}, \Pi_{\mathfrak{L}})$ *der Logik $\mathfrak{L}$ ist gegeben durch:*

- $\mathcal{D}_{\mathfrak{L}} = (\mathcal{D}_{\mathfrak{L},n}, \leq_{\mathfrak{L},n})_{n\in\omega}$ *sowie*
- $\Pi_{\mathfrak{L}} = (\pi_{\mathfrak{L},\sigma})_{\sigma\in Mor \sum}$, *wobei*
- $\pi_{\mathfrak{L},\sigma}(\Delta) := (\Delta_\sigma)$.

Desweiteren ist das kanonische Metaframe–Modell $\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}} = (\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}, \xi_{\mathfrak{L}})$ *gegeben durch die Interpretation*

- $\xi_{\mathfrak{L}}(P^n) = \{\Delta \in D_{\mathfrak{L},n} \mid P^n(v_1,\ldots,v_n) \in \Delta\}$

Mit etwas mehr Mühe weist man nun den folgenden Satz nach:

Satz 5.3 *Das kanonische Metaframe $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ ist ein modales Metaframe.*

Wir wissen also insbesondere (Korrektheitssatz!), daß jedes kanonische Metaframe eine modale Prädikatenlogik bestimmt. Induktiv über den Formelaufbau kann man nun — analog zur modalen Aussagenlogik — nachweisen, daß eine n–Formel A im Metaframe–Modell in einem 'Punkt' Δ gilt, gerade wenn sie im $\mathfrak{L}$–n–Typ Δ liegt.

Satz 5.4 (Fundamentalsatz) *Für jeden $\mathfrak{L}$–n–Typ Δ und jede n–Formel A gilt:*

$$\langle \mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}, \Delta\rangle \models A[v_1,\ldots,v_n] \quad \text{gdw} \quad A \in \Delta.$$

Aus diesem Zusammenspiel von Gültigkeit im kanonischen Modell und Zugehörigkeit zu $\mathfrak{L}$–n–Typen ergibt sich nun ohne weitere Komplikationen das folgende Vollständigkeitsresultat:

Korollar 5.1 *Für jede modale Prädikatenlogik $\mathfrak{L}$ gilt $ML(\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}) \subseteq \mathfrak{L}$.*

Wir können also jede Formel A die *nicht* zu $\mathfrak{L}$ gehört im kanonischen Frame falsifizieren. Ist nämlich A irgendeine n–Formel und $A \notin \mathfrak{L}$, so ist per definitionem die Menge $\{\neg A\}$ $\mathfrak{L}$–konsistent und läßt sich daher zu einem $\mathfrak{L}$–n–Typ Δ erweitern. Nach dem Fundamentalsatz gilt dann aber $\langle \mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}, \Delta \rangle \models \neg A[v_1, \ldots, v_n]$, so daß also A nicht in allen Punkten des Frames gilt, mithin $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} \not\models A$, d.h. A liegt nicht in der vom kanonischen Frame erzeugten Logik.

5.2.2 Einige Resultate

An dieser Stelle sollen noch einige Ergebnisse erwähnt werden, welche die Leistungsfähigkeit und mathematische Eleganz dieser Semantik unterstreichen. Eine modale (Aussagen–)Logik $\mathfrak{L}$ heißt *kanonisch*, falls sie durch ihr kanonisches Frame vollständig beschrieben wird, d.h. falls $\mathfrak{L} = ML(\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}})$ gilt. Jede kanonische Logik ist insbesondere Kripke–vollständig. Eine recht allgemeine (syntaktisch definierte) Klasse kanonischer Logiken gab H. Sahlqvist 1975 an.[33] Es läßt sich nun der folgende Satz beweisen:

Satz 5.5 *Sei $\mathfrak{L}$ eine kanonische modale Aussagenlogik. Dann ist $\mathfrak{QL}$ Metaframe–kanonisch.*

Die quantifizierte Erweiterung einer kanonischen modalen Aussagenlogik ist also wieder metaframe–kanonisch. Mit anderen Worten, jede solche Ausdehnung einer modalen Aussagenlogik ist *vollständig* bezüglich modaler Metaframes.

Eine weitere schöne Eigenschaft besteht darin, daß jede Logik, welche die Barcan–Formel enthält, diese an die vom kanonischen Frame erzeugte Logik 'vererbt'.[34]

Lemma 5.4 *Sei $\mathfrak{L}$ eine modale Prädikatenlogik, welche die Barcan–Formel Ba enthält. Dann ist $Ba \in ML(\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}})$.*

Dies ausnutzend kann man noch eine kleine Verschärfung des obigen Resultats vornehmen, welche gewährleistet, daß wir ohne Verlust der Kanonizität (Vollständigkeit) die Barcan–Formel zur Logik hinzunehmen können.

Satz 5.6 *Sei $\mathfrak{L}$ eine kanonische modale Aussagenlogik. Dann ist $\mathfrak{QLB} = \mathfrak{QL} + Ba$ metaframe–kanonisch.*

[33] Siehe [Sahlqvist 1975] und für einen eleganten Beweis der Kanonizität [Sambin/Vaccaro 1989].

[34] Die Barcan Formel sei dabei etwa in der Gestalt: $Ba = \Diamond \exists x P^1(x) \supset \exists x \Diamond P^1(x)$ gegeben.

5.3 Ausblicke

5.3.1 Zusammenhänge zur Funktor–Semantik

Eine naheliegende Spezialisierung der Metaframe–Semantik besteht darin, 'abstrakte n–Tupel' nunmehr als 'echte n–Tupel' aufzufassen. Mit anderen Worten, ein Objekt $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_n$ ist nichts anderes als ein Element des n–dimensionalen kartesischen Produkts von $\mathcal{D}_1$. Projektionen sind dann tatsächlich Projektionen auf den i–ten Faktor in $\mathbf{a}$ etc. Ohne nähere Details anzugeben (siehe hierzu [Skvortsov/Shehtman 1993]) sei erwähnt, daß sich in diesem Fall die Klauseln der Erfüllungsbeziehung beträchtlich vereinfachen. Metaframes, die diese Struktur haben, werden *kartesische Metaframes* genannt. Interessanterweise lassen sich nun modale Prädikatenlogiken, die die Identitätsaxiome erfüllen, vollständig durch kartesische $m^{(\doteq)}$–Metaframes charakterisieren.[35] Mit anderen Worten, akzeptiert man die klassischen Identitätsaxiome, so erübrigt sich die Redeweise von 'abstrakten n–Tupeln'.

Andererseits hängt der Begriff des kartesischen Metaframes eng mit der von Ghilardi eingeführten Funktor–Semantik zusammen. Genauer, es läßt sich zeigen, daß sich jedes kartesische Metaframe mit Identität, welches abzählbare Gegenstandsbereiche besitzt, als eine gewisse $\mathcal{C}$–Menge darstellen läßt und umgekehrt. In diesem Fall sind also Metaframe- und Funktorsemantik logisch äquivalent.[36] Anders verhält es sich, wenn man modale Logiken *ohne Identität* betrachtet. In diesem Fall läßt sich zeigen, daß allgemeine Metaframes semantisch stärker sind als solche für die Identität und somit auch als $\mathcal{C}$–Mengen. Die Metaframe–Semantik ist also eine *echte* Erweiterung der Funktorsemantik.

5.3.2 Dualitätstheorie

Die Dualitätstheorie der modalen Aussagenlogik entwickelte sich aus dem Zusammenspiel von algebraischer und relationaler (Kripke–) Semantik. Rückblickend waren hierfür die Arbeiten von Jónsson und Tarski[37] maßgeblich. Tatsächlich wurden verallgemeinerte Frames, welche die Vorzüge von algebraischer und relationaler Semantik in sich vereinigen, jedoch explizit erst 1970 von Makinson definiert [Makinson 1970]. Die volle (kategorielle) Dualität zwischen modalen Algebren und deskriptiven Frames eröffnete nun einen Weg, Begriffe und Methoden der universellen Algebra indirekt einzusetzen, um Ergebnisse in der Modelltheorie der modalen Logik zu erzielen. Das vielleicht bekannteste Resultat in dieser Richtung ist das Goldblatt–Thomason Theorem, welches eine modelltheoretische Charakterisierung modal definierbarer Klassen von Frames gibt [Goldblatt/Thomasson 1974].[38] Kurz gesagt, die Dualitätstheorie zahlte sich aus.

[35] Dies ist der Inhalt eines Repräsentationssatzes in [Skvortsov/Shehtman 1993]. Siehe Theorem 4.3.1, S. 96.

[36] Im überabzählbaren Fall ist es noch ungeklärt, ob kartesische Metaframes mit Identität und Funktorsemantik äquivalent sind!

[37] Siehe [Jónsson/Tarski 1951/52].

[38] In diesem Fall wird der Satz von Birkhoff aus der Algebra genutzt.

Im Fall der Metaframe–Semantik ist nun von Hiroyuki Shirasu ebenfalls eine Dualitätstheorie entwickelt worden [Shirasu 1998]. Diese baut auf einer kategoriellen Struktur auf, welche zuerst in den späten sechziger Jahren von F.W. Lawvere eingeführt wurde, sogenannten *Hyperdoktrinen* [Lawvere 1969].[39] Ohne weitere Details anzugeben sei an dieser Stelle lediglich festgehalten, daß man eine völlig analoge Dualitätsaussage beweisen kann: Modale Hyperdoktrinen sind dual zu (deskriptiven) verallgemeinerten Metaframes. Weiterhin ist jede modale Prädikatenlogik vollständig bezüglich der Hyperdoktrinen–Semantik.

Inwiefern sich diese Dualität — vergleichbar zum aussagenlogischen Fall — auszahlen wird und welche Hilfsmittel aus der Kategorientheorie und der Algebra geeignet wären, um interessante Ergebnisse in der quantifizierten Modallogik zu erhalten, muß sich aber erst noch herausstellen.

5.3.3 Ein Beispiel:

Beispielhaft für eine mögliche Interpretation eines Metaframes soll nun eine Beziehung zwischen klassischen Modellen und speziellen Metaframes hergestellt werden. Wir betrachten dazu ein klassisches Modell $\mathfrak{M}$ in einer rein relationalen Sprache $\mathbb{L}$, d.h. einen Gegenstandsbereich $\mathfrak{D}$ zusammen mit einer Interpretation der Prädikate. Man kann nun auf einfache Weise ein Metaframe $\mathfrak{F}$ aus diesem Modell konstruieren, welches bezüglich rein prädikatenlogischer Formeln „logisch äquivalent" ist. Dazu definiere man die ‚Welten' im n–ten Frame einfach als die von beliebigen n–Tupeln des klassischen Modells erzeugten n–Typen, ohne eine Erreichbarkeitsrelation zu spezifizieren. (Denn diese ist solange überflüssig, wie wir keine modalen Formeln interpretieren wollen.) Eine Interpretation ξ geben wir dadurch an, daß das n–stellige Prädikat P auf $typ_n(\mathbf{\bar{a}})$ zutreffen soll, genau dann, wenn $P(\bar{x}) \in typ_n(\mathbf{\bar{a}})$ gilt. Transformationen zwischen n– und m–Typen kann man dann genau wie in Lemma 3 definieren und das resultierende Metaframe erfüllt, wie man leicht nachweisen kann, die geforderten logischen Korrektheitsbedingungen. Entscheidend ist nun, daß für eine beliebige prädikatenlogische Formel $\phi(\bar{x})$ mit n freien Variablen die folgenden Äquivalenzen gelten:

$$\langle \xi, typ_n(\mathbf{\bar{a}}) \rangle \models \phi(\bar{x}) \quad \textbf{gdw} \quad \mathfrak{M} \models \phi(\bar{a}) \quad \textbf{gdw} \quad \phi(\bar{x}) \in typ_n(\mathbf{\bar{a}}).$$

Dabei können die n–Typen $typ_n(\mathbf{\bar{a}})$ als *partielle Beschreibungen* der Eigenschaften der n Gegenstände des Tupels $\mathbf{\bar{a}}$ verstanden werden. In einem solchen Metaframe sind also die Individuen des klassischen Modells nur noch durch ihre *Eigenschaften* repräsentiert. Es stellt sich dann die Frage, ob und auf welche Weise die Individuen aus ihren Eigenschaften rekonstruiert werden können — mit anderen Worten, ob und unter welchen Bedingungen die obige Konstruktion eines Metaframes aus einem klassischen Modell auch umgekehrt werden kann. Dies läuft m. E. im wesentlichen auf die sprachliche Unterscheidbarkeit von Individuen hinaus. Man beobachte, daß zwei Gegenstände **a** und **b** bezüglich n–stelliger Prädikate ununterscheidbar sein können, für ein $n+1$–stelliges Prädikat jedoch

[39] Tatsächlich spielt diese kategorielle Struktur auch eine bedeutsame Rolle in den semantischen Untersuchungen in [Ghilardi/Meloni 1991].

$P(a, \bar{c})$ sowie $\neg P(b, \bar{c})$ gilt. Mit anderen Worten, je höher man in der Hierarchie eines Metaframes aufsteigt, um so mehr Individuen werden erkennbar, d. h. sprachlich differenzierbar. Ein Metaframe ermöglicht es also gewissermaßen, Individuen ‚verschwinden' und ‚auftauchen' zu lassen, indem die *sprachlich ausdrückbare* ‚Feinstruktur' eines Modells transparent gemacht wird.

Da wir bisher nur über prädikatenlogische Formeln gesprochen haben, liegt es nahe, sich zu fragen, ob die obige Konstruktion auch dahingehend verallgemeinert werden kann, daß modale Formeln interpretiert werden können. Dazu müßte der intensionale Operator $\Box$ in $\mathfrak{M}$ eine Interpretation haben, die es gestattet, geeignete Erreichbarkeitsrelationen zwischen n–Typen zu definieren. Eine weitere Möglichkeit wäre, mit einer Klasse $\mathcal{K}$ von Modellen zu beginnen und $\Box\phi(\bar{x})$ — ähnlich wie in der Beweisbarkeitslogik — eine modelltheoretische Interpretation zu geben. Dann wären, aus geeigneten Abbildungen bzw. *Gegenstückrelationen* zwischen den klassischen Modellen, die Erreichbarkeitsrelationen im Metaframe zu spezifizieren. Hier wäre die Aufgabe, die spezifischen Bedingungen an Gegenstückrelationen zwischen Modellen — aufgefaßt als „mögliche Welten" — aufzufinden, die eine solche Korrespondenz erlauben.

6 Lewis' Counterpart Theorie

In diesem Kapitel möchte ich — ähnlich wie im Kapitel 4 bezüglich der Funktor–Semantik — eine grobe Skizze der Counterpart Theorie von David Lewis liefern. Dabei beziehe ich mich auf die ursprüngliche Formulierung in [Lewis 1968]. Diese Skizze soll natürlich nicht der Philosophie von David Lewis gerecht werden und auch nicht die philosophischen Motivationen dieser Theorie erläutern. Es soll lediglich darum gehen, einige formale Ähnlichkeiten zu verallgemeinerten Semantiken deutlich zu machen. Diese beziehen sich vor allem auf den Begriff des 'Counterparts' und die Behandlung der 'Querweltein–Identität' zwischen Gegenständen verschiedener möglicher Welten.

6.1 Eine Skizze der Counterpart–Theorie

Eine der Motivationen der Counterpart–Theorie ist es zu zeigen, daß die formale Behandlung modaler Diskurse keine Einführung modaler Operatoren bzw. spezieller intensionaler Logiken erfordert, sondern in der üblichen Quantorenlogik mittels geeigneter Postulate durchgeführt werden kann. Dementsprechend ist die Counterpart–Theorie eine erststufige Theorie, deren Modelle zweisortige Strukturen sind.[40] Genauer enthält der Quantifikationsbereich 'mögliche Welten' und alle 'Gegenstände', die in irgendeiner möglichen Welt liegen. Die primitiven Prädikate dieser Theorie sind die folgenden. Dabei ist in Klammern jeweils die intendierte Lesart angegeben.

Definition 6.1 (Primitive Prädikate)

- $W(x)$ *(x ist eine mögliche Welt.)*
- $I(x, y)$ *(x liegt* in *der möglichen Welt y.)*
- $A(x)$ *(A ist die* aktuale *mögliche Welt.)*
- $C(x, y)$ *(x ist ein Counterpart von y.)*

Schließlich werden die folgenden Postulate zugrunde gelegt:

Definition 6.2 (Postulate der Counterpart–Theorie)

$P1$ $\forall x \forall y (I(x, y) \rightarrow W(y))$
(„Nothing is in anything except a world")

$P2$ $\forall x \forall y \forall z (I(x, y) \wedge I(x, z) \rightarrow y \doteq z)$
(„Nothing is in two worlds")

$P3$ $\forall x \forall y (C(x, y) \rightarrow \exists z I(x, z))$
(„Whatever is a counterpart is in a world")

[40] Die 'Zweisortigkeit' ist jedoch kein Bestandteil einer modifizierten Semantik, sondern wird durch die unten angegebenen Postulate erzwungen.

$P4$ $\forall x \forall y (C(x,y) \rightarrow \exists z I(y,z))$
(„Whatever has a counterpart is in a world")

$P5$ $\forall x \forall y \forall z (I(x,y) \wedge I(z,y) \wedge C(x,z) \rightarrow x \doteq z)$
(„Nothing is a counterpart of anything else in its world")

$P6$ $\forall x \forall y (I(x,y) \rightarrow C(x,x))$
(„Anything in a world is a counterpart of itself")

$P7$ $\exists x (W(x) \wedge \forall y (I(y,x) \leftrightarrow A(y)))$
(„Some world contains all and only actual things")

$P8$ $\exists x A(x)$
(„Something is actual")

Die in $P7$ erwähnte Welt ist nach $P2$ und $P8$ eindeutig bestimmt und wird als *aktuale Welt* '@' bezeichnet. Es gilt also

$$@ := \iota x. \forall y (I(y,x) \leftrightarrow A(y)).$$

Die Counterpart–Relation 'C' wird nun als *Ähnlichkeitsrelation* zwischen Gegenständen in verschiedenen Welten verstanden. Insbesondere geht Lewis davon aus, daß ein Gegenstand niemals in zwei Welten zugleich liegen kann. In Lewis eigenen Worten:

> I prefer to say that you are in the actual world and no other, but you have counterparts in several other worlds. Your counterparts resemble you closely in content and context in important ways. They resemble you more closely than do the other things in their worlds. But they are not really you. For each of them is in his own world, and only you are here in the actual world. Indeed we might say, speaking casually, that your counterparts are you in other worlds, that they and you are the same; but this sameness is no more literal identity than the sameness between you today and you tomorrow. It would be better to say that your counterpart are men you *would have been*, had the world been otherwise. [Lewis 1968], S. 27–28

Lewis argumentiert nun dafür, daß eine Counterpart–Relation im allgemeinen weder transitiv noch symmetrisch sein sollte. Darüber hinaus seien Counterpart–Relationen i. allg. weder funktional noch injektiv. Auch die 'Surjektivität' von Counterpart–Relationen sowie das Prinzip, daß zu je zwei Welten v und w und jedem Gegenstand $\mathbf{a} \in v$ ein Gegenstand $\mathbf{b} \in w$ existiert, so daß $C(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ gilt, werden zurückgewiesen.

Wir werden sehen, daß all diese Prinzipien — in modifizierter Form — auch in der in Kapitel 7 entwickelten verallgemeinerten Kripke–Semantik *nicht* allgemeingültig sind.

Der Zusammenhang zu üblichen Formulierungen der modalen Prädikatenlogik in Sprachen der Quantorenlogik mit zusätzlichen modalen Operatoren und Interpretationen in einer Mögliche–Welten–Semantik wird nun mit Hilfe einer

Übersetzungsvorschrift gewonnen. Wir beschränken uns darauf, den modalen Fall anzugeben. Für weitere Details sei auf Lewis' Originalarbeit verwiesen. Man übersetzt einen Ausdruck der Form $(\Diamond\phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n))^\beta$ ("$\Diamond\phi(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ gilt in der möglichen Welt β") mittels einer rekursiven Definition in die Formel

$$\exists\beta_1\exists\gamma_1\ldots\exists\gamma_n(W(\beta_1)\wedge I(\gamma_1,\beta_1)\wedge C(\gamma_1,\alpha_1)\wedge\ldots \\ \ldots\wedge I(\gamma_n,\beta_1)\wedge C(\gamma_n,\alpha_n)\wedge\phi^{\beta_1}(\gamma_1,\ldots,\gamma_n))$$

der Counterpart–Theorie. Wie man nun leicht überprüfen kann, sind die folgenden Formeln *keine* Theoreme der Counterpart–Theorie.

1. $\Box\phi\rightarrow\Box\Box\phi$ ("Becker's Prinzip")
2. $\phi\rightarrow\Box\Diamond\phi$ ("Brouwer's Prinzip")
3. $(x\doteq y)\rightarrow\Box(x\doteq y)$ (x verschieden von y)
4. $(x\not\doteq y)\rightarrow\Box(x\not\doteq y)$ (x verschieden von y)
5. $\forall x\Box\phi(x)\rightarrow\Box\forall x\phi(x)$ (Barcan Formeln)
6. $\exists x\Box\phi(x)\rightarrow\Box\exists x\phi(x)$
7. $\Box\exists x\phi(x)\rightarrow\exists x\Box\phi(x)$

Jedoch ist auch in der Counterpart–Theorie die konverse Barcan–Formel $\Box\forall x\phi(x)\rightarrow\forall x\Box\phi(x)$ ein Theorem. Ich möchte nun im nächsten Abschnitt kurz demonstrieren, daß sich die Counterpart–Theorie — zumindest in ihrer ursprünglichen Formulierung — nicht als Instrument eignet, normale quantifizierte Modallogiken zu behandeln. Dies liegt schlicht daran, daß im allgemeinen das Prinzip der Box–Distribution $\Box(\phi\rightarrow\psi)\rightarrow(\Box\phi\rightarrow\Box\psi)$ verletzt wird.

6.2 Probleme der Counterpart–Theorie

Sei $\phi(x)$ eine rein quantorenlogische Formel mit der freien Variable x. Wir betrachten im weiteren die modale Formel

$$\psi(x)=\Box(\phi(x)\wedge\forall x\phi(x))\rightarrow\Box\forall x\phi(x).$$

Diese Formel ist offenbar ein Theorem der normalen quantifizierten Logik **QK**.[41] Hierzu bemerke man, daß $(\phi(x)\wedge\forall x\phi(x))\rightarrow\forall x\phi(x)$ eine quantorenlogische Tautologie ist und wende *Necessitation* (mn) und *Box–Distribution* (bd) an. Wir geben nun ein Modell $\mathcal{M}$ der Counterpart–Theorie an, in welchem $\psi(x)$ falsch ist. Hierzu enthalte $\mathcal{M}$ genau zwei Welten, w_1 und w_2. Ferner enthalte w_1 lediglich den Gegenstand u_1 sowie w_2 lediglich u_2. Soll $\mathcal{M}$ ein Modell der Counterpart–Theorie sein, so müssen zunächst u_1 und u_2 verschieden sein. Ferner müssen $C(u_1,u_1)$ und $C(u_2,u_2)$ in $\mathcal{M}$ gelten. Schließlich sei angenommen, daß $\mathcal{M}\models\phi^{w_1}(u_1)$ und $\mathcal{M}\models\neg\phi^{w_2}(u_2)$ gilt. Hierdurch ist unser Modell hinreichend spezifiziert. Abbildung 3 illustriert diese Situation:

[41] Für dieses Beispiel vergleiche auch [Hughes/Cresswell 1996], S. 353–357.

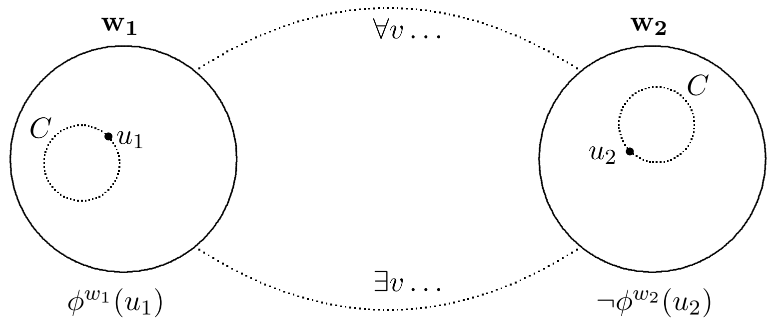

Abbildung 3

Nun ist die Formel $\psi(x)$ in der Welt w_1 falsch. Um dies einzusehen bringe ich zunächst noch die Übersetzung einer Formel der Form $(\Box\chi(x))^w$ ("$\Box\chi(x)$ gilt in der möglichen Welt w"), wobei ich mich dem Beispiel entsprechend auf eine freie Variable beschränke. Die Übersetzung in die Counterpart–Theorie lautet:

$$\forall v \forall y (W(v) \wedge I(y,v) \wedge C(y,x) \rightarrow \chi^v(y)).$$

Es gilt nun offenbar

(i) $\mathcal{M} \vDash (\Box(\phi(x) \wedge \forall x \phi(x)))^{w_1}$ sowie

(ii) $\mathcal{M} \vDash (\Diamond \exists x \neg \phi(x))^{w_1}$, d.h.

(iii) $\mathcal{M} \vDash (\neg \Box \forall x \phi(x))^{w_1}$.

Mithin kann $\psi(x)$ kein Theorem der Counterpart–Theorie sein. Dabei sieht man (i) wie folgt: Belegt man v mit w_1, so nutzt man $\mathcal{M} \vDash \phi^{w_1}(u_1)$. Belegt man hingegen v mit w_2, so gilt $\mathcal{M} \vDash I(x, w_1) \wedge I(y,v) \rightarrow \neg C(y,x)$, da u_2 kein Counterpart von u_1 ist. Daher gilt $\mathcal{M} \vDash \forall y(W(v) \wedge I(y,v) \wedge C(y,x) \rightarrow \chi^v(y))$, da der Antezedens immer falsch ist. (ii) hingegen ergibt sich aus der Annahme, daß $\mathcal{M} \vDash \neg\phi^{w_2}(u_2)$ gilt.

Man beachte, daß im letzten Fall keine Bedingungen an die Existenz von Counterparts gestellt werden, da die Formel $\neg\Box\forall x \phi(x)$ keine freien Variablen enthält. In der Tat ist dies die Quelle des Scheiterns der Box–Distribution. Man bemerke hierzu, daß durch die doppelte Quantifikation $\forall v \forall y \ldots$ über Welten *und* Gegenstände, Teilformeln einer Formel ψ der Gestalt $\Diamond\chi(\bar{z})$, je nachdem, welche freien Variablen $\bar{z}$ sie enthalten, in verschiedenen möglichen Welten ausgewertet werden. Insbesondere wird also ein *Satz* der Form $\Box\phi$ in allen möglichen Welten ausgewertet, ohne daß Einschränkungen in der Form einer Erreichbarkeitsrelation auf der Menge der möglichen Welten wirksam würden. Wir werden in Kapitel 7 sehen, daß dieser 'Defekt' durch eine geeignete Kombination der Ideen der Erreichbarkeit möglicher Welten und des Counterpart–Konzepts behoben werden kann.

6.3 Konsequenter Anti–Realismus

Ungeachtet der Tatsache, daß Sprachen der quantifizierten Modallogik geeignet sind, philosophische Probleme oder Prinzipien wie etwa solche des Essentialismus geeignet darzustellen, ist es nicht wünschenswert, daß die Semantik einer solchen Sprache weitreichende philosophische Implikationen in der einen oder anderen Richtung hat. Vielmehr sollte eine formale Semantik — so weit dies möglich ist — Neutralität wahren.

Modaler Realismus nun ist die Theorie, daß es viele mögliche Welten gibt, von denen eine, die aktuale, die unserige ist, in der wir leben. Der enorme Erfolg der Mögliche–Welten–Semantik hat diese ontologische Doktrin prominent gemacht. Man argumentiert, daß man sich auf die Existenz möglicher Welten verpflichten muß, falls man Kripke–Semantiken bei der Bewertung modaler Argumente einsetzen möchte (vgl. [Lewis 1986], S. 4). Auf der anderen Seite wird diese Position von vielen Philosophen schlicht als absurd betrachtet. Insbesondere die Möglichkeit, aus einer Semantik der modalen Logik Rückschlüsse auf die physikalische Beschaffenheit unseres Universums zu ziehen — wie es etwa David Lewis' System erlaubt — scheint nicht nur kontraintuitiv, sondern zudem ein Rückfall in ‚schlechte Scholastik' (A. Urquhart) zu sein.

Daher sollte eine anti–realistische Interpretation verallgemeinerter Kripke–Semantiken gesucht werden. Hierzu hat Charles Chihara kürzlich in [Chihara 1998] einen vielversprechenden Beitrag geleistet. Er entwickelt dort, in detaillierter Weise, eine anti–realistische Interpretation sogenannter **S5**–Typ Logiken, welche als Modellierung des Begriffs der logischen Notwendigkeit verstanden werden.

Chiharas Theorie baut im wesentlichen auf zweierlei auf. Zunächst diskutiert er die von John Etchemendy in [Etchemendy 1990] eingeführte Unterscheidung zwischen „representational" und „interpretational semantics", um sich dann gegen Etchemendys Position zu wenden, daß die klassische Modelltheorie „interpretational" sei. Statt dessen argumentiert er m. E. überzeugend, daß keine der beiden Kategorien passend sei und bietet eine neuartige Theorie über die Rolle von Interpretationen bzw. Strukturen in der formalen Logik. Hier gilt es anzuschließen und diese Ergebnisse auf Erweiterungen der klassischen Kripke–Semantik zu übertragen. Denn will man ernsthaft eine Position des modalen Anti–Realismus vertreten, so liegen die Vorteile auf der Hand, wenn man eine solche Interpretation gleich für eine möglichst allgemeine semantische Theorie entwickelt. Schließlich interpretiert Chihara den intensionalen Operator „$\Box$" nicht — wie David Lewis — als Quantor über mögliche Welten, sondern „in terms of how the world could have been". Erinnert man sich an die obige Fallstudie im Rahmen der Metaframe–Semantik, wo es um den graduellen Zuwachs der sprachlichen Ausdrucksfähigkeit ging, so wäre es zum Beispiel naheliegend, Chiharas Analyse durch „in terms of how any partial description of the world could have been" zu ersetzen. Hier wäre zu untersuchen, wie genau sich diese Art von Analyse auf verallgemeinerte Semantiken übertragen läßt. Dabei ist zu erwarten, daß die wesentliche Schwierigkeit darin bestehen wird, den philosophischen Status der Individuen in verallgemeinerten Kripke–Semantiken bzw. die Bedeutung der Verallgemeinerungen des ‘Counterpart'–Konzepts zu klären.

7 Ein alternatives Modellkonzept

In diesem Kapitel möchte ich ein alternatives Modellkonzept für die modale Prädikatenlogik entwickeln, welches einerseits von großer Allgemeinheit ist, andererseits eingängig formuliert und intuitiv anwendbar ist. Dieses Modellkonzept geht im wesentlichen auf die Funktor–Semantik — man vergleiche Kapitel 4 — sowie auf Ideen aus David Lewis' Counterpart–Theorie (Kapitel 6) zurück. Ich beginne mit einer informellen Exposition der wesentlichen Merkmale dieser Semantik:

Als Basislogik werden wir eine Kombination von freier Logik und **K** zugrundelegen. Insbesondere werden keine zusätzlichen genuin modalen Prinzipien wie die Notwendigkeit der Identität oder die konverse Barcan–Formel zu dieser Basislogik gehören.

Auf der semantischen Ebene werden wir das Modellkonzept der $\mathcal{C}$–Mengen in mehreren Richtungen verallgemeinern. Zunächst verzichten wir auf eine Formulierung in kategorieller Sprache — hierzu vergleiche man auch den Aufsatz [van Benthem 1993] — was uns zunächst von der Forderung nach Transitivität und Reflexivität von Frames befreit. Des weiteren verzichten wir auf die Funktionalität und Injektivität von Gegenstückrelationen. Dies kann man als 'Erbe' der Lewisschen Counterpart–Theorie auffassen.

Es ist häufig behauptet worden, daß eine adäquate semantische Behandlung erststufiger Modallogik den Gebrauch freier Logik erfordert. Man vergleiche diesbezüglich etwa den Aufsatz „Applications of Free Logic to Quantified Intensional Logic"von James Garson ([Garson 1991]). Was den hier entwickelten Ansatz von den üblicherweise angegebenen unterscheidet, ist die Tatsache, daß wir die Anwendung der freien Logik nicht *global* auf ein Universum 'möglicher Gegenstände' beziehen, sondern — in *lokaler* Perspektive — jede mögliche Welt eines modalen Frames ihren eigenen Bereich 'aktualer' und 'fiktionaler' Gegenstände kennt. Anschaulich gesprochen werden — beim Übergang von einer möglichen Welt $\mathcal{S}$ in eine andere erreichbare mögliche Welt $\mathcal{T}$ — alle 'Permutationen', 'Verschmelzungen' oder 'Aufspaltungen' von Gegenständen (semantisch) erlaubt sein, welche nicht explizit von der modalen Theorie der Welt $\mathcal{S}$ unterbunden werden. Gleichfalls müssen die aktuale Existenz bzw. die Fiktionalität eines Gegenstandes beim Übergang in eine andere mögliche Welt von der modalen Theorie fixiert werden, sollen sie nicht unbestimmt bleiben. Wir werden insbesondere, in Analogie zur klassischen Modelltheorie, modale Strukturen als semantische 'Grundobjekte' betrachten. Dies sind modale Frames, welche mit einer Interpretation der Relationssymbole ausgestattet sind.

Das Kapitel gliedert sich nun wie folgt. In Abschnitt 7.1 führen wir zunächst die freie Logik sowie die Kombination von freier Logik und **K** ein. Dies führt schließlich zum Begriff einer beliebigen modalen Prädikatenlogik. In den Abschnitten 7.2 und 7.3 führen wir die Modellstrukturen für die freie Modallogik ein und beweisen die Korrektheit der Semantik bezüglich des Basiskalküls **FK**. In 7.4 beweisen wir — indem wir zu einer beliebig vorgegebenen modalen Prädikatenlogik $\mathcal{L}$ ein kanonisches Modell konstruieren — ein allgemeines Vollständigkeitsresultat, welches zeigt, daß jede modale Prädikatenlogik vollständig bezüglich einer Klasse von modalen Strukturen ist. In 7.5 behandle ich Fragen der Frame–Vollständigkeit und Kanonizität und gebe einige Beispiele an. In 7.6 schließlich werden *generalisierte Frames* eingeführt, die durch die Ergänzung einer Algebra 'zulässiger Interpretationen' aus den in 7.2 eingeführten Frames hervorgehen. Bezüglich dieser Strukturen erhalten wir schließlich ein allgemeines Frame–Vollständigkeitsresultat.

7.1 Freie Modallogik

> What is a *free logic*? The answer to this question, informally speaking, is straightforward. The label "free logic" is shorthand for "logic free of existence assumptions with respect to its general and singular terms, but whose quantifiers are interpreted exactly as in classical first order predicate logic". [Lambert 1997], S. 35.

Zunächst wollen wir die im weiteren zu Grunde gelegten Sprachen $\mathbb{L}$ und $\mathbb{ML}$ fixieren:

Definition 7.1 (Die Sprachen $\mathbb{L}$ und $\mathbb{ML}$) *Wir bilden zunächst die Menge $\mathbb{A}^*$ aller endlichen Wörter (endlichen Zeichenfolgen) über dem Alphabet $\mathbb{A}$, welches aus folgenden Grundzeichen besteht:*

- *Eine abzählbar–unendliche Menge $\{P_i^n \mid i, n \in \omega\}$ von Relationssymbolen, wobei n die Stelligkeit angebe. (*Nichtlogische Signatur*)*
- *Die aussagenlogischen Junktoren $\neg$ und $\wedge$.*
- *Der Quantor $\exists$ sowie das Gleichheitszeichen $\doteq$.*
- *Der modale Operator $\Diamond$. (Logische Konstanten)*
- *Eine abzählbar unendliche Menge $\{x_i \mid i \in \omega\}$ von Variablen.*
- *Die Klammern (und). (Hilfssymbole)*

Aus der Menge $\mathbb{A}^*$ werden dann in der üblichen Weise die sinnvollen Ausdrücke, daß heißt Terme und Formeln, ausgesondert. Wir bezeichnen die Menge aller modalen Formeln mit $\mathbb{ML}$ und die Menge aller quantorenlogischen Formeln mit $\mathbb{L}$.

Definition 7.2 (Formelklassen) *Wir sprechen in der üblichen Weise von freien und gebundenen Vorkommen einer Variable in einer Formel. Formeln werden metasprachlich durch kleine griechische Buchstaben ϕ, ψ, χ etc. bezeichnet. Ist $\phi \in \mathbb{ML}$ eine modale Formel, so bezeichne $Var(\phi)$ die Menge aller in ϕ vorkommenden Variablen sowie $FV(\phi)$ die Menge aller frei in ϕ vorkommenden Variablen. Formeln* ohne *freie Variablen heißen auch* Aussagen*. Darüber hinaus heißt eine modale Formel ϕ eine* de dicto *Formel, wenn in ϕ keine Variable frei im Wirkungsbereich eines modalen Operators vorkommt. Ist dies doch der Fall, so heißt die Formel eine* de re *Formel.*

Bemerkung 7.1 *Offenbar ist jede quantorenlogische Formel zugleich eine modale Formel. Insbesondere erhält man die Menge $\mathbb{L}$ aus der Menge $\mathbb{ML}$, indem man aus $\mathbb{ML}$ alle Formeln entfernt, in denen modale Operatoren auftauchen. Wir werden von modalen Formeln zumeist schlicht als Formeln sprechen.*

Aus Gründen der besseren Übersichtlichkeit haben wir darauf verzichtet, mehr als einen modalen Operator in das Alphabet aufzunehmen. Wie man sich leicht überzeugt, könnte man jedoch auch problemlos mit einer beliebigen Familie $\{\Diamond_i \mid i \in I\}$ von modalen Operatoren arbeiten. Verläßt man hier jedoch den Bereich der abzählbaren Sprachen, so ist im allgemeinen eine Anwendung des Auswahlaxioms unumgänglich.[42]

Das Gleichheitszeichen $\doteq$ des Alphabets wurde verschieden von $=$ gewählt, da letzteres als metasprachliche Identität verwendet werden soll. So werden wir die Identität von Zeichenketten (Formeln) beispielsweise durch $\phi = \Diamond\psi$ ausdrücken. Darüber hinaus wird das Gleichheitszeichen $\doteq$ in modalen Kontexten nicht alle gewohnten Eigenschaften der (numerischen) Identität haben — etwa wird nicht das volle Leibniz' Gesetz gelten — was eine Abweichung in der Notation zusätzlich motiviert.

Die Zeichen $\bot$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\forall$ und $\Box$ sind als in der üblichen Weise definiert und als metasprachliche Abkürzung zu verstehen.

Schließlich habe ich darauf verzichtet, Funktions- und Konstantensymbole in das Alphabet aufzunehmen. Dabei stellt der Verzicht auf Funktionssymbole keine wirkliche Einschränkung dar, da man Funktionen auch mit ihrem Graph identifizieren und daher als spezielle Relationen auffassen kann. Der Verzicht auf Konstantensymbole ist jedoch substantieller, wie der Abschnitt 3.2 illustriert haben sollte. Um die Exposition der hier vorgeschlagenen Semantik übersichtlich zu halten, habe ich aus pragmatischen Gründen zunächst auf eine Aufnahme von Konstantensymbolen verzichtet. Dies sollte jedoch an anderer Stelle nachgeholt werden. Als Terme stehen uns also lediglich Variablen zur Verfügung.

7.1.1 Freie Logik: Axiomatisierung und Semantik

Wir geben zunächst eine Axiomatisierung ohne *Identitätsaxiome* an, da wir in manchen Fällen das Identitätssymbol „$\doteq$" auch als spezielles Prädikat — etwa sprachliche Ununterscheidbarkeit — interpretieren wollen. Solche Interpretationen wollen wir *nicht–standard* nennen. Die weiter unten hinzugefügten Identitätsaxiome werden hingegen als Formalisierung der Eigenschaften der *numerischen* Identität interpretiert. Dem entsprechend wird in der unten angegebenen Semantik die Formel $x \doteq y$ unter einer Belegung υ als *numerische*

[42] So etwa im Beweis von Lemma 7.12 s.u., wo gezeigt wird, daß sich jeder Typ zu einem freien Henkin–Typ ausdehnen läßt. Hier benötigt man eine Aufzählung aller Formeln, deren Existenz man ohne das Auswahlaxiom im allgemeinen nicht zeigen kann. Insbesondere benötigt man für diesen Beweis im nicht–abzählbaren Fall $Card(\mathbb{ML})$ viele Variablen.

Identität des durch die beiden Variablen (via Belegung) bezeichneten 'Gegenstandes' interpretiert werden. Modellbegriffe, die einer solchen Interpretation folgen, werden in der Literatur häufig auch als *normale Modelle* bezeichnet.[43]

In diesem Zusammenhang geht die unten vorgeschlagene Semantik in einem entscheidenden Punkt über klassische Konzepte hinaus, indem sie die Identität nicht als eine notwendige Eigenschaft eines Gegenstands, sondern als abhängig von einer gegebenen modalen Theorie auffaßt. Insofern, als also die Idee kontingenter Identitäten als kohärent erachtet wird, bricht die Theorie mit Prinzipien, wie sie etwa Kripke in seiner Theorie der metaphysischen Notwendigkeit[44] als auch Vertreter des logischen Atomismus[45] vertreten haben. Diese Standpunkte drücken sich unter anderem darin aus, daß die beiden Formeln

$$\forall x \forall y (x \doteq y \to \Box x \doteq y)$$

sowie

$$\forall x \forall y (x \not\doteq y \to \Box x \not\doteq y)$$

als logisch allgemeingültig erachtet werden. Dies wurde vielleicht zuerst klar von Frank Ramsey in seiner Adaption des logischen Atomismus formuliert: „numerical identity and differences are necessary relations“ [Ramsey 1925]. Gleichfalls bemerkt Nino Cocchiarella bezüglich Kripkes Theorie:

> But even in the framework of Kripkes metaphysical necessity (where quantifiers also refer *directly* to objects), an object cannot but be the object that it is, nor can one object be identical with another [...] [Cocchiarella 1984], S. 319.

Hier ist jedoch nicht der Ort, um verschiedene Auffassungen bzgl. der Identität zu diskutieren und philosophisch zu verteidigen. Statt dessen konzentrieren wir uns im folgenden auf die Entwicklung einer formalen Semantik, welche verschiedene Interpretationen zuläßt und insofern nachweißt, daß eine allgemeinere Gegenstandstheorie zumindest kohärent formulierbar ist.

Um Mißverständnissen vorzubeugen, sei hier jedoch noch auf einen Punkt eingegangen. In einzelnen möglichen Welten soll das Identitätssymbol in der üblichen Weise als 'numerische' Identität interpretiert werden. Behaupten wir jedoch, daß es eine sinnvolle Annahme sei, die Formel $x \doteq y \wedge \Diamond x \not\doteq y$ als erfüllbar zu erachten, so wollen wir gerade *nicht* — und dies mit Wittgenstein

[43] Für einen Vergleich verschiedener Konzepte von Identität vergleiche zum Beispiel [Scott 1970] und für eine Reduktion von Nicht–Standard–Interpretationen auf 'normale' Interpretationen der Identität im Rahmen des „Varying Domain Approach“ vergleiche [Fitting/Mendelsohn 1998], S. 159ff.

[44] Vergleiche Kripkes „Naming and Necessity“ [Kripke 1972].

[45] Vergleiche etwa Wittgensteins „Tractatus logico–philosophicus“ [Wittgenstein 1921] , Paragraphen 5.53—5.54, wo die Auffassung vertreten wird, daß Identitätsaussagen „Scheinsätze“ (5.534) seien. Vgl. auch 5.533: „Das Gleichheitszeichen ist also kein wesentlicher Bestandteil der Begriffsschrift.“sowie 5.5303: „Beiläufig gesprochen: Von *zwei* Dingen zu sagen, sie seien identisch, ist ein Unsinn, und von *Einem* zu sagen, es sei identisch mit sich selbst, sagt gar nichts.“

(siehe Fußnote) — behaupten, zwei Dinge seien eigentlich ein und derselbe Gegenstand.[46] Vielmehr wird diese Formel so interpretiert, daß einem Gegenstand in einer möglichen Welt zwei *Gegenstücke* in einer anderen möglichen Welt zugeordnet werden können. Wir sprechen in diesem Fall also nicht wirklich über *dieselben* Gegenstände.[47] Man vergleiche diesbezüglich die Verteidigung von David Lewis[48] gegen die Kritik von Saul Kripke, welcher genau diesen Punkt angriff und dabei einem Mißverständnis der von Lewis intendierten Interpretation der 'Transwelt–Identität' unterlag.

Kommen wir nun zur angekündigten Axiomatisierung, welche eine Variante der Axiomatisierungen ist, die man in [Hughes/Cresswell 1996] bzw. [Fitting/Mendelsohn 1998] findet. Diese gehen historisch auf Arbeiten von Saul Kripke (siehe [Kripke 1963]) und Karel Lambert (siehe [Lambert 1963]) zurück, welche unabhängig voneinander und fast zeitgleich eine Abschwächung des Axioms der *Universellen Instantiierung* vorschlugen, welches im klassischen Prädikatenkalkül formuliert werden kann als:

Klassische universelle Instantiierung: Ist y frei für x in $\phi(x)$, so ist $\forall x\phi(x) \to \phi(y)$ ein Axiom.

Die Axiomatisierung ohne Identitäts– und Existenzsymbol, die wir $\mathbf{PFL}^-$ nennen wollen, lautet wie folgt:

Definition 7.3 (Axiomatisierung von $\mathbf{PFL}^-$) *Im weiteren stehen die Ausdrücke ϕ und ψ für beliebige Formeln. Alle Formeln des folgenden Typs seien Axiome:*

Tautologien: *Alle Instanzen (in der Sprache $\mathbb{ML}$) von klassischen aussagenlogischen Tautologien sind Axiome.*

Hintere Generalisierung: *Kommt die Variable x nicht frei in ϕ vor, so ist die Formel $\phi \to \forall x\phi$ ein Axiom.*

Universelle Distribution: $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$.

Permutation: $\forall x\forall y\phi \leftrightarrow \forall y\forall x\phi$.

Universelle Instantiierung: *Ist y frei für x in $\phi(x)$, so ist $\forall y(\forall x\phi(x) \to \phi(y))$ ein Axiom.*

[46] Man beachte, daß hier der Gebrauch von zwei *verschiedenen* Variablen wesentlich ist, denn natürlich soll die Formel $x = x \wedge \Diamond x \neq x$ als unerfüllbar gelten, solange eine *erreichbare* mögliche Welt existiert.

[47] Dabei bleibt jedoch noch offen, ob eventuell gewisse Gegenstände in einer Welt auch 'numerisch' identisch mit Gegenständen in einer anderen Welt sein können. David Lewis hatte dies noch aus sowohl philosophischen wie technischen Gründen ausgeschlossen und spricht von der 'world–boundedness' eines Individuums. Wir werden dies i. allg. zulassen — ein Beispiel wäre die Wahl der identischen Funktion als Gegenstückabbildung — und in diesem Fall die Formel $x \doteq y \wedge \Diamond x \neq y$ als *falsch* erachten.

[48] Siehe das Postskriptum Teil E „Does Counterpart Theory Change Logic" zu „Counterpart Theory and Quantified Modal Logic" in [Lewis 1968] (Ausgabe von 1983).

Definition 7.4 (Schlußregeln von PFL$^-$:) *Wir haben zwei Deduktionsregeln:*

MODUS PONENS: *Sind die Formeln ϕ und $\phi \rightarrow \psi$ beweisbar, so auch ψ:*

$$\frac{\phi\ ,\ (\phi \rightarrow \psi)}{\psi}$$

UNIVERSELLE QUANTIFIKATION: *Ist eine Formel ϕ beweisbar, so auch $\forall x\phi$ für eine beliebige Variable x:*

$$\frac{\phi}{\forall x\phi}$$

Wir schließen noch einige Bemerkungen zu dieser Axiomatisierung an: Schwächt man das Axiom der *klassischen Universellen Instantiierung* wie oben angegeben ab, so ist das *Permutation* genannte Quantorenprinzip nicht mehr — wie im klassischen Prädikatenkalkül — *beweisbar* und muß daher folgerichtig als Axiom hinzugenommen werden.[49] Bis auf das Axiom der hinteren Generalisierung stimmt unsere Formulierung mit der in [Fitting/Mendelsohn 1998] überein. Dieses Axiom lautet dort:

LEERE QUANTIFIKATION: Kommt die Variable x nicht frei in ϕ vor, so ist die Formel $\forall x\phi \leftrightarrow \phi$ ein Axiom.

Dieses Axiom wollen wir verwerfen, da es, falls man auch *leere* Quantifikationsbereiche zuläßt (was wir tun werden), nicht mehr allgemeingültig ist. Mithin ist auch die Formel $\forall x\phi(x) \rightarrow \exists x\phi(x)$ nicht mehr allgemeingültig. Eine weitere Motivation dafür, dieses Axiom nicht zuzulassen, ist die Tatsache, daß andernfalls die Formel $\Box\exists x(x \doteq x)$ allgemeingültig ist, denn die Behauptung, daß es eine *logische Wahrheit* sei, daß notwendigerweise 'Dinge' existieren, kann mit Recht bestritten werden. Dies sollte Bestandteil einer modalen *Theorie* und nicht der Logik sein, denn es enthält eine *Existenzbehauptung.* Gewissermaßen ist die Abschwächung der *leeren Quantifikation* der entscheidende Schritt der uns hier von einer Axiomatisierung der klassischen Logik trennt. Das System in [Fitting/Mendelsohn 1998] ist nämlich insofern eine Axiomatisierung der klassischen Logik, als es exakt die klassisch gültigen *Sätze*, also Formeln ohne freie Variablen, beweist.

Wir geben nun eine zweite Axiomatisierung an, welche vor allem dadurch motiviert ist, Existenzannahmen *sprachlich explizit* zu machen. Diese Formulierung wird schließlich den weiteren formalen Entwicklungen zu Grunde gelegt werden. Zunächst geben wir die rein prädikatenlogischen Axiome ohne Identität an. Dieses System wollen wir $\mathbf{PFL}^{E!}$ nennen. Hierbei ist das *Existenzsymbol*, welches wir der Literatur folgend mit $E!$ bezeichnen wollen, als *primitiv* aufzufassen. Semantisch wird seine *Extension* in einem Modell gerade mit dem Quantifikationsbereich zusammenfallen. Gehen wir zu reicheren Sprachen mit Identität über, so läßt sich $E!(x)$ auch definieren als $\exists y(y \doteq x)$, wobei y verschieden von x zu wählen ist. Hierzu werden später noch einige Bemerkungen gemacht.

[49] Spekulationen über die philosophische Bedeutung des so abgeschwächten Axioms findet man in Ermanno Bencivengas Aufsatz „Why Free Logic?" [Bencivenga 1989].

Definition 7.5 (Axiomatisierung von PFL$^{E!}$) *Im weiteren stehen die Ausdrücke ϕ und ψ für beliebige Formeln. Alle Formeln des folgenden Typs seien Axiome:*

TAUTOLOGIEN: *Alle Instanzen (in der Sprache $\mathbb{ML}$) von klassischen aussagenlogischen Tautologien sind Axiome.*

HINTERE GENERALISIERUNG: *Kommt die Variable x nicht frei in ϕ vor, so ist die Formel $\phi \to \forall x\phi$ ein Axiom.*

UNIVERSELLE DISTRIBUTION: $\forall x(\phi \to \psi) \to (\forall x\phi \to \forall x\psi)$.

E! 1: $\forall x E!(x)$.

E! 2: *Ist y frei für x in $\phi(x, \bar{z})$ und $y \notin \bar{z}$, so ist $\forall x\phi(x, \bar{z}) \to (E!(y) \to \phi(y, \bar{z}))$ ein Axiom.*

Definition 7.6 (Schlußregeln von PFL$^{E!}$:) *Wie bisher haben wir die beiden Schlußregeln* Modus Ponens *und* Universelle Quantifikation.

Nehmen wir das Identitätssymbol in die Sprache auf, so fordern wir zusätzlich folgende Axiome:

Definition 7.7 (Axiome für die Identität:) *Es seien x und y beliebige Variablen und ϕ eine beliebige Formel, so daß x frei in ϕ vorkommt sowie y frei für x in $\phi(x)$ ist. Die Notation $\phi(y//x)$ stehe für Formeln die aus ϕ hervorgehen, indem einige (nicht notwendig alle) Vorkommen von x durch y ersetzt werden. Dann sind alle Formeln des folgenden Typs Axiome:*

SELBSTIDENTITÄT: $(x \doteq x)$

LEIBNIZ' GESETZ: $(x \doteq y) \to (\phi \to \phi(y//x))$

Das System, das sich aus **PFL**$^{E!}$ durch Hinzunahme der Axiome für die Identität ergibt, wollen wir schlicht **PFL** nennen. Es sei bemerkt, daß das so formulierte *Leibniz' Gesetz* nur ein schwaches erststufiges Gegenstück des vollen Leibniz–Prinzips der *Ununterscheidbarkeit von Identischem* ist. Einerseits schließt es keine Nichtstandard–Modelle aus, in denen Identität als sprachliche Ununterscheidbarkeit aufgefasst wird. (Man bedenke, daß in 'armen' Sprachen möglicherweise nur sehr wenige Dinge diskriminiert werden können!) Andererseits kann in zweitstufiger Logik die Identität definiert werden, indem man über alle Eigenschaften P quantifiziert und setzt:

$$x \doteq y :\leftrightarrow \forall P(P(x) \leftrightarrow P(y)).$$

Das Leibniz' Gesetz ist also eher als objektsprachliches Gegenstück des Quineschen metalogischen Prinzips der *Substituierbarkeit von Identischem* zu verstehen.

Schließlich ist noch eine wichtige Bemerkung über den Zusammenhang zwischen *Existenz* und *Identität* zu machen, ein Sachverhalt, auf den vermutlich als erster Jaakko Hintikka aufmerksam machte.[50] Formuliert man nämlich ein

[50]Vergleiche seinen Aufsatz „Existential Presuppositions and Their Elimination" ([Hintikka 1969]).

Axiomensystem wie oben mit Existenzsymbol, jedoch ohne Identität, so ist das Existenzsymbol prinzipiell nicht *eliminierbar*. Das heißt, es existiert keine Formel $\phi(x)$, die das Existenzsymbol *nicht* enthält, so daß die Formel $\phi(x) \leftrightarrow E!(x)$ *beweisbar* wäre. Dies wurde von Bencivenga, Lambert und Meyer bewiesen.[51] Bereichert man die Sprache jedoch um das Identitätssymbol, so läßt sich *beweisen*, daß $E!(x)$ äquivalent ist zu $\exists y(y \doteq x)$ (x verschieden von y), weshalb in diesem Fall „E!“ als *definiert* begriffen werden kann. Dieser Sachverhalt wird von Lambert auch als „Hintikka's Theorem“ bezeichnet, von welchem wir weiter unten Gebrauch machen werden.

Satz 7.1 (Hintikka's Theorem) *Im Kalkül* $\mathbf{PFL}^{\doteq}$ *ist das folgende Bikonditional beweisbar:*

$$\mathbf{PFL}^{\doteq} \vdash E!(x) \leftrightarrow \exists y(y \doteq x),$$

wobei x verschieden von y zu wählen ist.

B e w e i s. Die ursprüngliche Formulierung Hintikka's in [Hintikka 1969] war eher semantischer Natur, da er dort mit sogenannten „model sets“ — in moderner Terminologie maximal konsistenten Formelmengen — arbeitete und zeigte, daß die Negationen der beiden Implikationen $E!(x) \rightarrow \exists y(y \doteq x)$ und $\exists y(y \doteq x) \rightarrow E!(x)$, also die Formeln $E!(x) \wedge \neg\exists y(y \doteq x)$ und $\exists y(y \doteq x) \wedge \neg E!(x)$ respektive nicht erfüllbar sind. Wir folgen grob seiner Beweisidee, arbeiten aber rein syntaktisch im Beweiskalkül $\mathbf{PFL}^{\doteq}$. Zu zeigen sind also die beiden folgenden Beweisbeziehungen, wobei vorausgesetzt sei, daß die Variablen y und x verschieden sind:

(A) $E!(x) \vdash_{PFL^{\doteq}} \exists y(y \doteq x)$

(B) $\exists y(y \doteq x) \vdash_{PFL^{\doteq}} E!(x)$

Mit Hilfe des Deduktionstheorems folgt dann leicht die Beweisbarkeit des Bikonditionals $E!(x) \leftrightarrow \exists y(y \doteq x)$. Beginnen wir mit dem Beweis von (A). Wir haben folgende Ableitungskette:

$E!(x) \vdash_{PFL^{\doteq}} (x \doteq x)$	Identitätsaxiom	(1)
$E!(x) \vdash_{PFL^{\doteq}} E!(x) \wedge (x \doteq x)$	Mit Tautologie aus (1)	(2)
$E!(x) \vdash_{PFL^{\doteq}} \forall y \neg(y \doteq x) \rightarrow (E!(x) \rightarrow \neg(x \doteq x))$	Instanz von E! 2	(3)
$E!(x) \vdash_{PFL^{\doteq}} \neg(E!(x) \rightarrow \neg(x \doteq x))$	Tautologische Umformung aus (2)	(4)
$E!(x) \vdash_{PFL^{\doteq}} \neg\forall y \neg(y \doteq x)$	Mit Modus Tollens aus (3)	(5)
$E!(x) \vdash_{PFL^{\doteq}} \exists y(y \doteq x)$	Quantorenregel	(6)
$\mathbf{PFL}^{\doteq} \vdash E!(x) \rightarrow \exists y(y \doteq x)$	Deduktionstheorem	(7)

Zum Beweis von (B) sei auf das unten ausgeführte Vollständigkeitsresultat und auf Lemma 7.7 verwiesen. □

Die Erörterungen der Axiomatik abschließend, sei bemerkt, daß es vielfältige und interessante formale Verbindungen zwischen Systemen der freien Logik auf

[51] Vergleiche [Lambert 1997] S. 42 und S. 83ff bzw. [Bencivenga/Lambert/Meyer 1982].

der einen und der klassischen Prädikatenlogik auf der anderen Seite gibt.[52] Wir halten hier lediglich fest, daß man durch eine geeignete Bereicherung des Axiomensystems von $\mathbf{PFL}^{\doteq}$ die klassische Prädikatenlogik erhält. Wir nehmen hierzu an, daß das Existenzsymbol definiert sei als $E!(x) := \exists y(y \doteq x)$ (y verschieden von x).

Lemma 7.1 (Reduktion auf den klassischen Prädikatenkalkül) *Bereichert man das Axiomensystem* $\mathbf{PFL}^{\doteq}$ *um das Schema Cl:*

$$\text{(Cl)} \quad E!(x),$$

wobei die Variable x beliebig sei, so erhält man eine Axiomatisierung des klassischen Prädikatenkalküls.

B e w e i s. Offenbar kann man mit Hilfe des Schemas (Cl) ohne weiteres die klassische universelle Instantiierung zurückgewinnen. Damit hat man aber bereits eine Axiomatisierung der klassischen Prädikatenlogik. Für Details vergleiche [Bencivenga 1986]. □

Wir kommen nun zur Definition der semantischen Strukturen für die Logik $\mathbf{PFL}^{\doteq}$. Die Logik $\mathbf{PFL}^{\doteq}$ werden wir im folgenden schlicht *freie Logik* nennen.

Definition 7.8 (Strukturen) *Ein Tripel* $\mathcal{S} = \langle \mathcal{U}_\mathcal{S}, \mathcal{D}_\mathcal{S}, \mathcal{I}_\mathcal{S} \rangle$ *ist eine* Freie Logik Struktur, *künftig kurz Struktur, falls* $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ *eine* nicht–leere *Menge ist,* $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ *eine (möglicherweise leere) Teilmenge von* $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ *und schließlich* $\mathcal{I}_\mathcal{S}$ *eine* Interpretationsfunktion, *welche jedem n–stelligen Relationssymbol der Sprache* $\mathbb{L}$ *eine Teilmenge des n–dimensionalen kartesischen Produkts von* $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ *zuordnet. Wir bezeichnen dann die Klasse aller Strukturen mit* $\mathcal{K}_{PFL}$.

Die Menge $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ fassen wir informell als „Universe of Discourse" auf, das heißt als die Menge der Gegenstände, über die wir reden wollen. Die Teilmenge $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ hingegen umfaßt dann diejenigen Gegenstände, deren Existenz wir präsupponieren. Diese Gegenstände nimmt man als aktual existierend an. Man beachte, daß während sich der *Wirkungsbereich* der Quantoren auf die Menge $\mathcal{D}_\mathcal{S}$ beschränkt, Relationssymbole in der Menge $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ der 'möglichen Gegenstände' interpretiert werden.

Definition 7.9 (Belegungen) *Ist eine Struktur* $\mathcal{S}$ *gegeben, so ist eine* Belegung $\upsilon : Var \longrightarrow \mathcal{U}_\mathcal{S}$ *eine Abbildung von der Menge* Var *der Variablen in die Menge* $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ *der möglichen Gegenstände von* $\mathcal{S}$. *Eine Belegung heißt eine x–Variante von υ, falls sie in allen Variablen außer möglicherweise in x mit υ übereinstimmt. Eine Belegung* $\widetilde{\upsilon}$ *heißt eine* existentielle x–Variante, *falls* $\widetilde{\upsilon}(x) \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$. *Ist* $\widetilde{\upsilon}$ *eine existentielle x–Variante mit* $\widetilde{\upsilon}(x) = \mathbf{a} \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$, *so schreiben wir für* $\widetilde{\upsilon}$ *auch* $\upsilon_x^{\mathbf{a}}$.

Definition 7.10 (Modelle) *Ein Modell* $\mathcal{M}$ *für die Freie Logik ist ein Paar* $\langle \mathcal{S}, \upsilon \rangle$, *bestehend aus einer Struktur* $\mathcal{S}$ *und einer Belegung* υ *in* $\mathcal{U}_\mathcal{S}$.

[52] Man vergleiche hierzu [Bencivenga 1986] und insbesondere [Trew 1970].

Die Modellbeziehung für Formeln wird nun mit Ausnahme von $\exists$–Formeln in der üblichen Weise erklärt. Steht uns kein Identitätssymbol zur Verfügung und ist somit das Existenzsymbol $E!$ als primitiv zu verstehen, so benötigen wir auch für dieses Symbol eine extra Klausel. Die beiden Klauseln lauten nun wie folgt:

$$\langle \mathcal{S}, v\rangle \vDash \exists x\phi :\Longleftrightarrow \text{ es gibt eine existentielle } x\text{–Variante } \widetilde{v} \text{ so daß } \langle \mathcal{S}, \widetilde{v}\rangle \vDash \phi,$$

sowie für das Existenzsymbol

$$\langle \mathcal{S}, v\rangle \vDash E!(x) :\Longleftrightarrow v(x) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

7.1.2 Freie Logik: Korrektheit und Vollständigkeit

Da wir in den Abschnitten 7.3 und 7.4 die Korrektheit und Vollständigkeit des modalen Kalküls **FK** bzgl. eines Modellkonzepts zeigen werden, welches auf den bisher vorgestellten Modellstrukturen für die freie Logik aufbaut, reicht es an dieser Stelle einige historische Bemerkungen zu machen, da wir die Adäquatheit der obigen Semantik bzgl. des Kalküls $\mathbf{PFL}^{\doteq}$ auf diese Weise implizit mitbeweisen.

Der erste publizierte Vollständigkeitsbeweis für das oben angegebene Axiomensystem $\mathbf{PFL}^{-}$ ohne Identität und Existenzsymbol findet sich in [Leblanc/Meyer 1970]. Die im letzten Abschnitt vorgestellten Modellstrukturen — man nennt diesen Ansatz häufig auch den „inner domain–outer domain approach“— wurden unabhängig voneinander von Nuel Belnap und Karel Lambert Ende der 1950er Jahre vorgeschlagen. Einen detaillierten Beweis der Adäquatheit des Kalküls **PFL** bzgl. dieser Semantik findet man in der Arbeit [Leblanc/Thomason 1968]. Der erste *publizierte* Vollständigkeitsbeweis findet sich hingegen in Bas van Fraassens Arbeit „The Completeness of Free Logic“ [van Fraassen 1966] und basiert nicht auf den hier vorgestellten Modellstrukturen, sondern auf der sogenannten „supervaluational semantics“. Diese Semantik hat aber darüber hinaus zahlreiche Anwendungen in anderen Gebieten der philosophischen Logik gefunden, wofür stellvertretend Kit Fines Analyse von ‘Vagheit’ genannt sei [Fine 1975]. Die Hauptmotivation, eine alternative Semantik für die freie Logik anzugeben, bestand aber darin, den Verdacht zu zerstreuen, sich auf eine Meinongsche Philosophie nicht aktualisierter aber möglicher Gegenstände festlegen zu müssen.[53] Es sei hier jedoch noch in aller Kürze darauf hingewiesen, daß auch der hier präsentierte semantische Apparat eine solche Interpretation keineswegs erzwingt. Vielmehr sind verschiedene Explikationen der Semantik vorgeschlagen worden, welche den „outer domain“ auf eine ontologisch ‘harmlose’ Weise zu interpretieren gestatten. Zu nennen wäre etwa die Arbeit [Lambert/Meyer 1968], welche den „outer domain“ als Menge linguistischer Ausdrücke interpretiert.[54]

[53]Vgl. [Meinong 1973] und für einen Versuch der Rehabilitierung der Meinongschen Philosophie [Parsons 1980].

[54]Vergleiche aber auch die Arbeiten [van Fraassen 1967] und [Scott 1967], die andere Ansätze verfolgen.

7.1.3 Freie Modallogik: Axiomatisierung

Wir werden nun die freie Logik mit der modalen Logik **K** kombinieren und das resultierende System **FK** (sprich „free K“) nennen. Durch Bereicherung des quantorenlogischen Teils der Logik (wie in Lemma 7.1 ausgeführt) erhält man die Logik **QK** („quantified K“), welche üblicherweise als ‘Basislogik’ zugrunde gelegt wird. Bereichert man weiterhin den modalen Teil der Axiomatik, so gelangt man zu Systemen die wir — Standard–Konventionen folgend — mit **FS4**, **QS4**, **QT** etc. bezeichnen werden. Darüber hinaus werden wir im folgenden das Identitätssymbol als *logisches* Symbol zur Sprache hinzuzählen. Streng genommen sollten wir also die Logiken zusätzlich mit dem Superskript $\doteq$ versehen, d.h. von den Logiken $\mathbf{QS4}^{\doteq}$ oder $\mathbf{FK}^{\doteq}$ etc. sprechen.

Definition 7.11 (Axiome für die Identität:) *Es seien x und y beliebige Variablen und $\phi(x, \bar{z})$ eine beliebige Formel, so daß x — neben eventuell weiteren Variablen $\bar{z}$ — frei in $\phi(x, \bar{z})$ vorkommt, y nicht frei im Wirkungsbereich eines modalen Operators vorkommt sowie y frei für x in $\phi(x, \bar{z})$ ist. Die Notation $\phi(y//x)$ stehe für Formeln die aus ϕ hervorgehen, indem man an Stellen in denen x frei, aber* nicht *im Wirkungsbereich eines modalen Operators ist, einige (nicht notwendig alle) Vorkommen von x durch y ersetzt. Im Wirkungsbereich eines modalen Operators ersetze man hingegen entweder* alle *oder* keine *Vorkommen der Variable x durch y. Dann sind alle Formeln des folgenden Typs Axiome:*

SELBSTIDENTITÄT: $(x \doteq x)$

MODALES LEIBNIZ’ GESETZ: $(x \doteq y) \rightarrow (\phi \rightarrow \phi(y//x))$

Unter welchen Substitutionen eine modale Prädikatenlogik abgeschlossen sein sollte, ist umstritten. Es hat sich eingebürgert — man vergleiche diesbezüglich noch einmal die Definition 5.1 — einen Abschluß unter, wie wir es genannt haben, zweitstufigen Substitutionen zu fordern. Die Definition dieser Substitutionen wiederholen wir der Bequemlichkeit halber noch einmal in Definition 7.13 unten.

Die Frage, unter welchen Umständen es sinnvoll wäre modale Prädikatenlogiken, die lediglich unter schwächeren zweitstufigen Substitutionsprinzipien abgeschlossen sind, zuzulassen, muß an anderer Stelle behandelt werden.

Definition 7.12 (Erststufige Substitution: Terme für Variablen) *Ist $\phi(x, \bar{z})$ eine modale Formel, in der x frei vorkommt und ist y frei für x in $\phi(x, \bar{z})$, so ist die Formel $\phi(y/x, \bar{z})$ eine* erststufige Substitutionsinstanz. *Dabei sind in der Formel $\phi(y/x, \bar{z})$ alle freien Vorkommen von x durch y ersetzt.*

Definition 7.13 (Zweitstufige Substitution: Formeln für Prädikate) *Sei ϕ eine Formel, in der das n–stellige Relationssymbol P vorkommt und sei ψ eine weitere modale Formel. Dann heißt $(\psi/P(\bar{x}))\phi$ eine* zweitstufige Substitutionsinstanz *von ϕ. Dabei geht $(\psi/P(\bar{x}))\phi$ aus ϕ hervor, indem jedes Vorkommen von $P^n(\bar{y})$ in ϕ durch $(\bar{y}/\bar{x})\psi$ ersetzt wird, wobei möglicherweise gebundene Variablen umbenannt werden müssen.*

Definition 7.14 (Modale Prädikatenlogiken) *Der Kalkül* **FK** *enthält alle Axiomen–Schemata und Regeln des Kalküls* **PFL** *(angewandt auf die Formelmenge* $\mathbb{ML}$*) sowie das Schema*
(bd) $\Box(\phi \to \psi) \to (\Box\phi \to \Box\psi)$ *(Box–Distribution oder Normalität)*
und die Regel
(mn) $\phi \,/\, \Box\phi$ *(Necessitation).*
Wir werden im folgenden häufig kalkülisierte Logiken mit der Menge der im Kalkül beweisbaren *Formeln identifizieren, d.h. etwa die Logik* **FK** *als Teilmenge von* $\mathbb{ML}$ *auffassen.*

Bereichert man die (Basis–) Logik **FK** *um die Axiomenschemata für die Identität, so erhält man das System* $\mathbf{FK}^{\doteq}$*. Ergänzt man zusätzlich modale oder quantorenlogische Axiomenschemata wie etwa Ba, T, Cl oder* 4*, so erhält man Systeme* **FBa***,* **QT** *etc.*

Eine beliebige *modale Prädikatenlogik wird gleichfalls durch ihre Theoreme spezifiziert. Dabei heißt* $\mathfrak{L}$ *eine modale Prädikatenlogik, falls* $\mathbf{FK} \subseteq \mathfrak{L} \subseteq \mathbb{ML}$ *gilt und* $\mathfrak{L}$ *abgeschlossen ist unter den Regeln (mn),* $(\forall)$ *und (mp) und mit jeder Formel* $\phi \in \mathfrak{L}$ *auch jede erst- oder zweitstufige Substitutionsinstanz* $\widetilde{\phi} \in \mathfrak{L}$ *ist. Wir sagen dann auch, daß* $\mathfrak{L}$ *unter Substitutionen abgeschlossen ist. Bezüglich zweitstufiger Substitution sind eventuell einige Einschränkungen notwendig, die verhindern, daß eingeschränkte Schemata, wie etwa das modale Leibniz' Gesetz, verletzt werden. Ist* $\mathbf{FK}^{\doteq} \subseteq \mathfrak{L}$*, so heißt* $\mathfrak{L}$ *eine modale Prädikatenlogik mit Identität.*

Lemma 7.2 *Ist* $\mathfrak{L}$ *eine modale Prädikatenlogik im Sinne von Definition* 5.1*, so ist* $\mathfrak{L}$ *auch unter erststufigen Substitutionen abgeschlossen, d.h. eine modale Prädikatenlogik im Sinne von Definition 7.14.*

B e w e i s. Sei $\mathfrak{L}$ eine modale Prädikatenlogik im Sinne von Definition 5.1. Dann umfaßt $\mathfrak{L}$ die klassische Prädikatenlogik, also insbesondere das Prinzip der *klassischen universellen Instantiierung.* Ist dann $\phi(x, \bar{z}) \in \mathfrak{L}$ und y frei für x in $\phi(x, \bar{z})$, so ist zunächst — nach einer Anwendung der Regel der *universellen Quantifikation* — $\forall x \phi(x, \bar{z}) \in \mathfrak{L}$. Es ist aber

$$\forall x \phi(x, \bar{z}) \to \phi(y/x, \bar{z})$$

eine Instanz des Schemas der klassischen universellen Instantiierung. Also ist auch $\phi(y/x, \bar{z}) \in \mathfrak{L}$, was zu zeigen war. □

Durch die obige Definition der Identitätsaxiome schränken wir das Quinesche Prinzip der Substituierbarkeit von Identischem insofern ein, als wir es so formulieren, daß es keine Implikationen bezüglich möglicher Querweltein–Identifizierungen der Gegenstände hat. Dies wird ausreichen, um in der Theorie einer einzelnen Welt 'klassische Verhältnisse' zu erzwingen. Formeln hingegen, welche 'Querweltein–Identifizierungen' annehmen, sollen als Teil einer gegebenen modalen Theorie aufgefasst werden.

Zur Illustration seien einige Beispiele von Formeln angegeben, welche *keine* Instanzen des Leibniz' Schemas sind:

$$(x \doteq y) \to (\Box(x \doteq x) \to \Box(x \doteq y))$$

(Es sind nicht alle Vorkommen von x durch y ersetzt, x ist frei im Wirkungsbereich von „$\Box$")

$$(x \doteq y) \to (\Diamond(x \not\doteq y) \to \Diamond(y \not\doteq y))$$

(Die Variable y kommt frei im Wirkungsbereich eines modalen Operators vor.)

$$(x \doteq y) \to (\exists y \Diamond(x \not\doteq y) \to \exists y \Diamond(y \not\doteq y))$$

(Die Variable y ist nicht frei für x.)

Folgende Formeln hingegen sind korrekte Instanzen des Schemas:

$$(x \doteq y) \to (\Box(x \doteq x) \to \Box(y \doteq y))$$

(Es sind alle Vorkommen von x durch y ersetzt.)

$$(x \doteq y) \to (\Diamond(x \not\doteq z) \to \Diamond(y \not\doteq z))$$

(Die Variable y kommt nicht frei im Wirkungsbereich eines modalen Operators vor.)

$$(x \doteq y) \to ((x \doteq z) \to (y \doteq z))$$

(y ist frei für x und kommt nicht im Wirkungsbereich eines modalen Operators vor.)

$$(x \doteq y) \to ((x \doteq x) \to (y \doteq x))$$

(y ist frei für x und kommt nicht im Wirkungsbereich eines modalen Operators vor. Es ist nur ein Vorkommen von x durch y ersetzt.)

Wie die letzten beiden Beispiele zeigen, können wir also ohne weiteres nachweisen, daß das Identitätssymbol „$\doteq$" in einer gegebenen Welt die Axiome einer Äquivalenzrelation erfüllt.

Für spätere Referenz halten wir noch einige Standardeigenschaften des Beweiskalküls fest.

Satz 7.2 (Endlichkeitssatz für $\vdash$) *Ist Δ eine Formelmenge, ϕ eine Formel und gilt $\Delta \vdash \phi$, so existiert bereits eine endliche Teilmenge Δ_0 von Δ, so daß $\Delta_0 \vdash \phi$.*

B e w e i s. Diese Eigenschaft ergibt sich direkt aus der Definition eines formalen Beweises. $\Box$

Satz 7.3 (Deduktionstheorem für $\vdash$) *Seien Δ eine Formelmenge und ϕ sowie ψ beliebige Formeln. Dann gilt $\Delta, \phi \vdash \psi$ genau dann, wenn $\Delta \vdash \phi \to \psi$.*

B e w e i s. Der Beweis überträgt sich wörtlich aus dem klassischen Fall, da die uns interessierenden Kalküle die klassische Aussagenlogik umfassen. Vergleiche etwa [Rautenberg 1996]. $\Box$

7.2 Modellstrukturen für die freie Modallogik

Eine *modale Struktur* — die exakte Definition gebe ich in 7.16 — besteht im folgenden aus einer Familie von erststufigen Strukturen der *Freien Logik* zusammen mit einer Familie von Counterpart–Relationen zwischen diesen Strukturen.

Wir werden das Konzept des „universe of discourse“ dahingehend verallgemeinern, als wir von *lokalen* und *globalen Diskursuniversen* sprechen werden. Ist uns eine Familie $\langle \mathcal{S}_i, i \in I \rangle$ von Strukturen der freien Logik gegeben, so ist das lokale Diskursuniversum der Struktur $\mathcal{S}_i$ die Menge $\mathcal{U}_{\mathcal{S}_i}$. Analog ist $\mathcal{D}_{\mathcal{S}_i}$ der lokale Quantifikationsbereich von $\mathcal{S}_i$. Jede Struktur beinhaltet also gewissermaßen ihre eigene ‘Ontologie’, die nebst einem Quantifikationsbereich auch ihren eigenen Bereich ‘fiktionaler’ Gegenstände kennt. Diese kann von Struktur zu Struktur variieren. Das globale Diskursuniversum ist dann die Menge $\mathfrak{Du} := \bigcup_{i \in I} \mathcal{U}_i$ und umfaßt alle Gegenstände, über die in *irgendeiner* der Strukturen aus der Familie I ‘geredet’ wird.

Die einzige Bedingung nun, die wir an die Counterpart–Relationen stellen werden, ist ihre *Links–Totalität*. Diese Eigenschaft werden wir auch die *Counterpart–Existenz–Eigenschaft* nennen.

Dies soll die Idee widerspiegeln, daß wir nur dann sinnvoll davon sprechen können, daß eine Welt möglich (oder erreichbar) relativ zu einer anderen ist, wenn wir zumindest zu jedem ‘Gegenstand’ in der einen Welt einen ‘Gegenstand’ in der anderen Welt zur Verfügung haben. Um dies einzusehen, betrachte man eine Formel der Gestalt $\Diamond\phi(x)$ und nehme an $\mathcal{M}$ und $\mathcal{N}$ seien zwei Modelle derart, daß $\mathcal{N}$ von $\mathcal{M}$ aus als erreichbar gelte und der Gegenstand $v_{\mathcal{M}}(x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{M}}$ kein Gegenstück in $\mathcal{N}$ habe. Wie soll man den Wahrheitswert von $\Diamond\phi(x)$ in $\mathcal{M}$ festlegen? Offenbar ist hier — da der Term x in $\mathcal{N}$ nicht denotiert — eine ad–hoc Festlegung notwendig. Dies könnte etwa dadurch geschehen, daß jede solche Formel als ‘falsch’ interpretiert wird, wodurch jedoch eine Aufgabe des *Bivalenzprinzips* unvermeidlich wird.[55] Will mal also an einer bivalenten Tarskischen Semantik festhalten, so sind gewisse Bedingungen an erlaubte Counterpart–Relationen unerläßlich. Die folgende Definition ersetzt insbesondere die übliche Forderung nach Monotonizität der Gegenstandsbereiche.

Definition 7.15 (Counterpart–Existenz–Eigenschaft) *Seien $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ zwei Freie–Logik Strukturen, sowie C eine beliebige binäre Relation zwischen den Gegenstandsbereichen $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ und $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$. Dann hat C die Counterpart–Existenz–Eigenschaft (kurz CE–Eigenschaft) genau dann, wenn jedes Element aus $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ mit mindestens einem Element aus $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ in Relation steht, formal:*

$$\forall x \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}}\ \exists y \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}} : \langle x, y \rangle \in C$$

Wir sagen dann, daß die Relation C eine CE–Relation ist. Weiter bezeichnen wir die Menge aller CE–Relationen zwischen $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ und $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ kurz mit $\mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ und

[55] Das Bivalenzprinzip kann kurz wie folgt formuliert werden: Ist $\mathcal{M}$ ein Modell und $\phi(\bar{x})$ eine Formel, so ist entweder $\phi(\bar{x})$ oder $\neg\phi(\bar{x})$ ‘wahr’ in $\mathcal{M}$ (formal: entweder $\mathcal{M} \vDash \phi(\bar{x})$ oder $\mathcal{M} \vDash \neg\phi(\bar{x})$). Dies ist klar vom Prinzip des *tertium non datur* zu unterscheiden, welches besagt, daß nicht zugleich eine Formel *und* ihre Negation in einem Modell ‘wahr’ sein können, formal: $\mathcal{M} \nvDash \phi(\bar{x}) \wedge \neg\phi(\bar{x})$.

schließlich die Menge aller CE–Relationen zwischen den Gegenstandsbereichen zweier Strukturen aus einer Familie $\mathcal{W}$ *von Strukturen als* $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$*, formal:*

$$\mathcal{C}_{\mathcal{W}} = \{C \in \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{T}} \mid \mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathcal{W}\}$$

Definition 7.16 (Modale Struktur) *Wir nennen ein Paar* $\mathfrak{f} = \langle \mathcal{W}, \mathcal{C} \rangle$ *eine* modale Struktur*, falls* $\mathcal{W} \neq \emptyset$ *eine* nicht–leere *Teilmenge der Klasse* $\mathcal{K}_{PFL^{\doteq}}$ *aller Strukturen der Freien Logik ist und* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ *eine Teilmenge der Menge* $\mathcal{C}_{\mathcal{W}}$ *aller CE–Relationen zwischen (Gegenstandsbereichen von) Strukturen aus* $\mathcal{W}$*. Strukturen* $\mathcal{S}$ *aus* $\mathcal{W}$ *nennen wir auch* mögliche Welten*. Die zu einer modalen Struktur gehörige Menge von CE–Relationen zwischen zwei möglichen Welten* $\mathcal{S}$ *und* $\mathcal{T}$ *bezeichnen wir dann mit* $\mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$*. Es ist also* $\mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}} := \mathcal{C} \cap \mathcal{C}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$*. Die Klasse aller modalen Strukturen bezeichnen wir schließlich mit* $\mathfrak{FrK}$*.*

Definition 7.17 (Modales Frame) *Wir nennen ein Paar* $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{C} \rangle$ *ein* modales Frame*, falls* $\mathcal{U}$ *eine* nicht–leere *Familie* $\{\langle D_i, U_i \rangle \mid i \in I$ *und* $D_i \subseteq U_i \neq \emptyset\}$ $(I \neq \emptyset)$ *von lokalen Diskursuniversen ist und* $\mathcal{C}$ *eine Teilmenge der Menge aller CE–Relationen zwischen den* U_i *aus* $\mathcal{U}$*. Ein modales Frame ist also nichts anderes als eine modale Struktur ohne Interpretationsfunktionen.*

Das Konzept der Erreichbarkeitsrelation auf der Menge der möglichen Welten wird nun ersetzt durch die Forderung nach der Existenz einer CE–Relation zwischen diesen Welten. Ist uns also eine modale Struktur $\mathfrak{f}$ gegeben, so sagen wir, daß die Welt $\mathcal{S}$ die Welt $\mathcal{T}$ vermittels der Relation C 'sieht', kurz $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$, genau dann, wenn $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ ist. Ist $\mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}} = \emptyset$, so sagen wir, daß die Welt $\mathcal{T}$ von $\mathcal{S}$ aus nicht erreichbar ist.

Definition 7.18 (Modales Modell) *Ein modales Modell* $\mathfrak{M}$ *ist ein Paar* $\langle \mathfrak{f}, \Upsilon \rangle$*, bestehend aus einer modalen Struktur* $\langle \mathcal{W}, \mathcal{C} \rangle$ *und einer Funktion*

$$\Upsilon : \mathcal{W} \times \mathit{Var} \longrightarrow \mathfrak{Du} \textit{ mit } \Upsilon(\mathcal{S}, x) \in \mathcal{U}_{\mathcal{S}},$$

wobei $\mathfrak{Du}$ *das globale Diskursuniversum und* $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ *das lokale Universum der Struktur* $\mathcal{S}$ *sei. Die Funktion* Υ *legt also für jede Struktur* $\mathcal{S}$ *aus* $\mathcal{W}$ *eine Variablenbelegung* $\upsilon_{\mathcal{S}} : \mathit{Var} \longrightarrow \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ *fest.*

Wir können ein so definiertes modales Modell demnach auch als eine Klasse von erststufigen Modellen für die Freie Logik auffassen, welche um eine Familie von Gegenstückrelationen im Sinne von Definition 7.16 bereichert wurde. Wir erklären nun — in der üblichen Weise — induktiv über den Aufbau der modalen Formeln die Beziehung "$\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \phi(y_1, \ldots, y_n)$".

Wir geben dabei — in redundanter Weise — auch die Erfüllungsbeziehungen für die als definiert zu verstehenden Symbole $\forall, \Box$ etc. an, da wir hiervon später Gebrauch machen wollen. Selbstverständlich beschränken wir uns jedoch bei induktiven Beweisen über den Formelaufbau auf die 'genuin' zur Sprache gehörigen Symbole.

Definition 7.19 (Modellbeziehung) *Im folgenden seien $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ und $\psi(z_1, \ldots, z_m)$ modale Formeln mit den freien Variablen $y_1, \ldots, y_n$ und $z_1, \ldots, z_m$ respektive. Diese werden jedoch nur erwähnt werden, wenn dies nötig ist. Sei $\mathfrak{M}$ ein modales Modell, $\mathcal{S}$ eine mögliche Welt aus $\mathfrak{M}$ und sei $\upsilon_{\mathcal{S}}$ die zugehörige Belegung. Wir definieren:*

(a) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \not\models \perp$

(b) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models x_i \doteq x_j :\Longleftrightarrow \upsilon_{\mathcal{S}}(x_i) = \upsilon_{\mathcal{S}}(x_j)$ *in* $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$.

(c) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models R(y_1, \ldots, y_n) :\Longleftrightarrow \langle \upsilon_{\mathcal{S}}(y_1), \ldots, \upsilon_{\mathcal{S}}(y_n) \rangle \in \mathcal{I}_{\mathcal{S}}(R)$.

(d) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \neg\phi :\Longleftrightarrow \langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \not\models \phi$.

(e) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \phi \wedge \psi :\Longleftrightarrow \langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \phi$ *und* $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \psi$.

(f) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \Box\phi(y_1, \ldots, y_n) :\Longleftrightarrow$ *für alle* $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ *und alle* $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$*–Varianten* $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$*, so daß* $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(y_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(y_i) \rangle \in C$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *:*
$\langle \mathfrak{f}, \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \models \phi(y_1, \ldots, y_n)$.

(g) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \Diamond\phi(y_1, \ldots, y_n) :\Longleftrightarrow$ *es gibt ein* $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ *und eine* $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$*–Variante* $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$*, so daß* $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(y_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(y_i) \rangle \in C$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *und*
$\langle \mathfrak{f}, \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \models \phi(y_1, \ldots, y_n)$.

(h) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x\phi(x) :\Longleftrightarrow$ *für alle existentiellen x–Varianten* $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ *gilt* $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models \phi(x)$.

(i) $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \exists x\phi(x) :\Longleftrightarrow$ *es gibt eine existentielle x–Variante* $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ *mit* $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models \phi(x)$.

Definition 7.20 (Modellklassen und Allgemeingültigkeit)
(i) Gilt für alle möglichen Welten $\mathcal{S}$ aus dem Modell $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{f}, \Upsilon \rangle$, daß $\langle \mathfrak{f}, \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \phi(y_1, \ldots, y_n)$, so schreiben wir hierfür $\mathfrak{M} \models \phi(y_1, \ldots, y_n)$ und sagen, daß ϕ in $\mathfrak{M}$ gilt. Die Theorie $Th(\mathfrak{M})$ eines modalen Modells $\mathfrak{M}$ ist dann die Menge aller Formeln ϕ, so daß $\mathfrak{M} \models \phi$. Man beachte, daß im Unterschied zum quantorenlogischen Fall, die Theorie eines modalen Modells im allgemeinen nicht vollständig ist.
(ii) Gilt andererseits $\langle \mathfrak{f}, \Upsilon \rangle \models \phi$ für alle Belegungen Υ in die modale Struktur $\mathfrak{f}$, so sagen wir, daß ϕ in $\mathfrak{f}$ gilt und schreiben $\mathfrak{f} \models \phi$. Die Theorie $Th(\mathfrak{f})$ einer modalen Struktur ist die Menge aller Formeln ϕ, so daß $\mathfrak{f} \models \phi$ gilt.
(iii) Ist ferner $\mathfrak{M} \models \phi$ für alle Modelle $\mathfrak{M}$ aus einer Klasse $\mathfrak{K}$ von modalen Modellen, so sagen wir, daß ϕ in $\mathfrak{K}$ gilt oder, daß $\mathfrak{K}$ eine Modellklasse für *ϕ ist. Hierfür schreiben wir kurz $\mathfrak{K} \models \phi$. Ist umgekehrt $\mathfrak{K}$ die Klasse* aller *modalen Modelle $\mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{M} \models \phi$, so heißt $\mathfrak{K}$* die Modellklasse von *ϕ und wird mit $\mathfrak{K}(\phi)$ bezeichnet.*

(iv) Allgemeiner betrachten wir Modellklassen von Mengen von Formeln Δ und bezeichnen diese mit $\mathfrak{K}(\Delta)$. Ist schließlich $\mathfrak{K}$ die Klasse aller modalen Modelle und gilt $\mathfrak{K} \vDash \phi$, so schreiben wir kurz $\vDash \phi$ und sagen, daß ϕ allgemeingültig *ist.*

(v) Ist schließlich $\mathfrak{F}$ ein modales Frame, so gilt $\mathfrak{F} \vDash \phi$ genau dann, wenn für alle modalen Strukturen $\mathfrak{f}$, die aus $\mathfrak{F}$ durch Ergänzung irgendeiner Interpretationsfunktion hervorgehen, $\mathfrak{f} \vDash \phi$ gilt. Die Theorie $Th(\mathfrak{F})$ eines modalen Frames ist dann die Menge aller Formeln ϕ, so daß $\mathfrak{F} \vDash \phi$ gilt.

7.3 Korrektheit der Semantik

Lemma 7.3 (Koinzidenzlemma) *Sei $\phi = \phi(y_1, \ldots, y_n)$ eine modale Formel mit $FV(\phi) = \{y_1, \ldots, y_n\}$ und seien $z_1, \ldots, z_n$ frei für $y_1, \ldots, y_n$ in ϕ und paarweise verschieden. Seien weiter zwei Belegungen gegeben mit $\upsilon_{\mathcal{S}}(y_i) = \beta_{\mathcal{S}}(z_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt:*

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \phi(y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow \langle \mathcal{S}, \beta_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \phi(z_1, \ldots, z_n).$$

B e w e i s. Wir beweisen die Behauptung induktiv über den Formelaufbau. Sei $\mathfrak{M}$ ein beliebiges modales Modell, $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ eine beliebige modale Formel mit den freien Variablen $y_1, \ldots, y_n$ und seien die Variablen $z_i, i = 1, \ldots, n$ frei für y_i in ϕ und paarweise verschieden. Dann lautet die Induktionsannahme wie folgt:

(Ind. Ann.) Für eine beliebige Struktur $\mathcal{S}$ aus dem modalen Modell $\mathfrak{M}$ und beliebige Belegungen $\upsilon_{\mathcal{S}}$ und $\beta_{\mathcal{S}}$ mit der Eigenschaft, daß $\upsilon_{\mathcal{S}}(y_i) = \beta_{\mathcal{S}}(z_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ ist, gilt

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \phi(y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow \langle \mathcal{S}, \beta_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \phi(z_1, \ldots, z_n).$$

Da nun die Wahrheitsbedingungen für die logischen Konstanten $\neg, \wedge, \vee, \exists x$, und $\forall x$ sowie für atomare Formeln in der üblichen Weise erklärt sind, reicht es zunächst, sich auf den Beweis des klassischen Koinzidenzlemmas zu berufen. Für die klassische Prädikatenlogik vgl. hierzu etwa [Rautenberg 1996] (S. 52) und für die Freie Logik im hier benutzten Sinne vgl. [Bencivenga 1986]. Wir können also annehmen, daß der Induktionsbeweis für atomare Formeln sowie für '$\neg$', '$\wedge$' und '$\exists$' durchgeführt sei. Sei nun — die Induktion abschließend — $\psi(y_1, \ldots, y_n) = \Diamond\phi(y_1, \ldots, y_n)$, wobei die Induktionsbehauptung für ϕ gelte. Seien weiter $\mathcal{S}$ eine beliebige Struktur aus $\mathfrak{M}$, z_i frei für y_i in ϕ $(i = 1, \ldots, n)$ und seien Belegungen $\upsilon_{\mathcal{S}}$ und $\beta_{\mathcal{S}}$ gegeben mit $\upsilon_{\mathcal{S}}(y_i) = \beta_{\mathcal{S}}(z_i)$. Dann gilt per definitionem

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \Diamond\phi(y_1, \ldots, y_n)$$

genau dann, wenn es eine Struktur $\mathcal{T}$ in $\mathfrak{M}$ gibt, so daß $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ gilt und eine $\langle y_1, \ldots, y_n \rangle$–Variante $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ existiert, so daß $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(y_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(y_i) \rangle \in C$ für $i = 1, \ldots, n$ und

$$\langle \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \vDash \phi(y_1, \ldots, y_n).$$

Sei dann $\widetilde{\beta_{\mathcal{T}}}$ eine $\langle z_1, \ldots, z_n \rangle$–Variante von $\upsilon_{\mathcal{T}}$ mit $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(y_i) = \widetilde{\beta_{\mathcal{T}}}(z_i)$ für $i = 1, \ldots, n$. Dann gilt aber nach Induktionsannahme:

$$\langle \mathcal{T}, \widetilde{\beta_{\mathcal{T}}} \rangle \vDash \phi(z_1, \ldots, z_n).$$

Da aber $\upsilon_{\mathcal{S}}(y_i) = \beta_{\mathcal{S}}(z_i)$ und $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(y_i) = \widetilde{\beta_{\mathcal{T}}}(z_i)$ gilt, folgt $\langle \beta_{\mathcal{S}}(z_i), \widetilde{\beta_{\mathcal{T}}}(z_i) \rangle \in C$ für $i = 1, \ldots, n$. Dies heißt aber — da nach wie vor $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ gilt — daß

$$\langle \mathcal{S}, \beta_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \Diamond \phi(z_1, \ldots, z_n)$$

gilt, womit der Induktionsbeweis abgeschlossen ist. □

Lemma 7.4 (Gebundene Umbenennung) *Sei ϕ eine modale Formel und sei x eine in ϕ frei auftretende Variable. Ferner sei y eine Variable, welche nicht in $Var(\phi)$ liegt. Bezeichnet dann ϕ^y_x diejenige Formel, die aus ϕ dadurch hervorgeht, daß sämtliche freien Vorkommen von x durch y ersetzt werden, so gilt für jedes modale Modell $\mathfrak{M}$ und jede Struktur $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle$ in $\mathfrak{M}$:*

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \forall x \phi \Longleftrightarrow \langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \forall y \phi^y_x.$$

B e w e i s. Sei $y \notin Var(\phi)$, d.h. y kommt weder frei noch gebunden in ϕ vor. Es ist nun $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \forall x \phi$ per definitionem genau dann, wenn für alle $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}} \subseteq \mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ die Beziehung $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}}{}^{\mathbf{a}}_x \rangle \vDash \phi$ besteht.
Da nun y frei für x in $\phi(x)$ ist und

$$\upsilon_{\mathcal{S}}{}^{\mathbf{a}}_x(x) = \mathbf{a} = \upsilon_{\mathcal{S}}{}^{\mathbf{a}}_y(y)$$

gilt, folgt unter Benutzung des Koinzidenzlemmas 7.3, daß die obige Bedingung äquivalent ist zu $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}}{}^{\mathbf{a}}_y \rangle \vDash \phi^y_x$ für alle $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Dies ist aber per definitionem äquivalent zu $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \forall y \phi^y_x$. □

Satz 7.4 (Korrektheit) *Sei* **FK** *die freie Modallogik, $\phi \in$* **FK** *und $\mathfrak{M}$ ein beliebiges modales Modell. Dann gilt: $\mathfrak{M} \vDash \phi$, oder kurz $\vDash$* **FK**. *Ist insbesondere $\mathfrak{F}$ ein beliebiges modales Frame, so gilt $\mathfrak{F} \vDash$* **FK**.

B e w e i s. Wir haben nachzuweisen, daß jede im Kalkül **FK** beweisbare Formel ϕ in jedem beliebigen modalen Modell $\mathfrak{M}$ gültig ist, d.h. in jeder Welt dieses Modells gilt. Hierzu ist ein beliebiges Modell herauszugreifen und zunächst zu zeigen, daß alle Instanzen der Axiomenschemata gültig sind. Sodann zeigt man, daß die Regeln des Kalküls, also *Modus Ponens*, *Necessitation* und *Universelle Quantifikation* die Allgemeingültigkeit von Formeln konservieren.

TAUTOLOGIEN: Daß alle Instanzen von klassischen aussagenlogischen Tautologien allgemeingültig sind, folgt unmittelbar aus der (klassischen) Definition der Modellbeziehung für die aussagenlogischen Junktoren und der Bivalenz der Semantik.

HINTERE GENERALISIERUNG: Dies ist gleichfalls sofort einsichtig. Man beachte jedoch, daß die Formel $\forall x \phi$ in einer Welt eines modalen Modells allein aufgrund des Umstands wahr sein kann, daß der Quantifikationsbereich leer ist, während gleichzeitig die Formel $\neg\phi$ gilt. Mit anderen Worten, die Umkehrung des Axiomenschemas, also $\forall x\phi \to \phi$, ist *nicht* allgemeingültig.

UNIVERSELLE DISTRIBUTION: Sei $\mathcal{S}$ eine mögliche Welt aus $\mathfrak{M}$ und $\upsilon_{\mathcal{S}}$ die zugehörige Belegung. Wir nehmen an, daß $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x(\phi \to \psi) \wedge \forall x\phi$ gilt und wählen eine beliebige existentielle x–Variante $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ von $\upsilon_{\mathcal{S}}$ (Existiert keine solche, so ist nichts mehr zu zeigen!). Dann gilt nach Annahme und Definition $\langle \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models (\phi \to \psi) \wedge \phi$ und damit auch $\langle \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models \psi$. Da die existentielle x–Variante beliebig gewählt war, folgt schließlich $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x\psi$, was zu zeigen war.

E! 1: Sei x eine beliebige Variable. Dann ist die Formel $E!(x)$ von der Form $\exists y(y \doteq x)$, wobei y verschieden von x ist. Sei $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ eine beliebige existentielle x–Variante (Ist $\mathcal{D}_{\mathcal{S}} = \emptyset$, so ist wieder nichts zu zeigen!). Wähle ferner eine existentielle y–Variante $\widehat{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ von $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ mit $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}(x) = \widehat{\upsilon_{\mathcal{S}}}(y)$. Dann gilt per definitionem $\langle \mathcal{S}, \widehat{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models (y \doteq x)$. Hieraus ergibt sich durch Anwendung der Definition der Modellbeziehung für $\exists$ bzw. $\forall$, daß $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x \exists y(y \doteq x)$ gilt.

E! 2: Sei $\phi(x, \bar{z})$ eine modale Formel, y frei für x in $\phi(x, \bar{z})$ und $y \notin \bar{z}$. Sei ferner angenommen, daß $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \forall x\phi(x, \bar{z}) \wedge E!(y)$ gilt. Dann folgt zunächst, daß $\upsilon_{\mathcal{S}}(y) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ gilt und daher auch $\langle \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models \phi(x, \bar{z})$ für die x–Variante $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ mit $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}(x) = \upsilon_{\mathcal{S}}(y)$. Dann stimmen aber die Belegungen $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ und $\upsilon_{\mathcal{S}}$ auf den Variablentupeln $(x, \bar{z})$ und $(y, \bar{z})$ respektive überein, $y \notin \bar{z}$ und y ist frei für x in $\phi(x, \bar{z})$. Daher folgt mit dem Koinzidenzlemma 7.3, daß $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \phi(y, \bar{z})$ gilt, was zu zeigen war.

SELBSTIDENTITÄT Die Modellbeziehung $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models (x \doteq x)$ gilt offenbar per definitionem für jede Struktur $\mathcal{S}$ und jede Belegung $\upsilon_{\mathcal{S}}$ der Variablen in $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$. Dies folgt aus der Funktionalität der Variablenbelegungen.

LEIBNIZ' GESETZ Wir beweisen dies per Induktion über den Formelaufbau. Dabei lautet die Induktionsbehauptung wie folgt: Ist ϕ eine beliebige modale Formel, so daß $\widetilde{\phi} = (x \doteq y) \to (\phi \to \phi(y//x))$ eine *zulässige* Instanz des Leibniz' Gesetzes ist, so ist $\widetilde{\phi}$ allgemeingültig.

(i) Für atomare Formeln ist die Behauptung trivial.

(ii) Sei $\phi(x, y, \bar{z}) = \neg\psi(x, y, \bar{z})$ und $\widetilde{\phi}(x, y, \bar{z})$ eine zulässige Instanz des Leibniz Schemas. Dann ist offenbar auch $\widetilde{\psi}(x, y, \bar{z})$ eine zulässige Instanz des Leibniz Schemas, also nach Induktionsvoraussetzung

$$\widetilde{\psi}(x, y, \bar{z}) = (x \doteq y) \to (\psi(x, y, \bar{z}) \to \psi(y//x, y, \bar{z}))$$

allgemeingültig. Dann ist aber auch

$$(x \doteq y) \to (\psi(y//x, y, \bar{z}) \to \psi(x, y, \bar{z}))$$

eine zulässige Instanz, da z.B. x in $\psi(y//x, y, \bar{z})$ nicht frei im Wirkungsbereich eines modalen Operators ist, also allgemeingültig. Wäre nun $\widetilde{\phi}(x, y, \bar{z})$ nicht allgemeingültig, so existierte ein modales Modell $\mathfrak{M}$ und eine mögliche Welt $\mathcal{S}$ in $\mathfrak{M}$, so daß

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models (x \doteq y) \wedge \neg\psi(x, y, \bar{z}) \wedge \psi(x//y, y, \bar{z})$$

gilt. Dies ist aber wegen der Allgemeingültigkeit von

$$(x \doteq y) \to (\psi(y//x, y, \bar{z}) \to \psi(x, y, \bar{z}))$$

unmöglich. Also ist $\widetilde{\phi}(x, y, \bar{z})$ gleichfalls allgemeingültig.
(iii) Sei $\phi = (\psi \wedge \chi)$ Diesen Fall zeigt man analog.
(iv) Sei $\phi(x, y, \bar{z}) = \exists w \psi(w, x, y, \bar{z})$ und $\widetilde{\phi}(x, y, \bar{z})$ eine zulässige Instanz des Leibniz Schemas. Dann ist auch

$$(x \doteq y) \rightarrow (\psi(w, x, y, \bar{z}) \rightarrow \psi(w, y//x, y, \bar{z})) \quad (\star)$$

eine zulässige Instanz, also nach Induktionsvoraussetzung allgemeingültig. Sei angenommen, daß $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models (x \doteq y) \wedge \exists w \psi(w, x, y, \bar{z})$ in einem modalen Modell $\mathfrak{M}$ gilt, d.h. $\upsilon_{\mathcal{S}}(x) = \upsilon_{\mathcal{S}}(y)$ und $\langle \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models \psi(w, x, y, \bar{z})$ für eine w–Variante $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ von $\upsilon_{\mathcal{S}}$. Da die Variable w von x und y verschieden ist, gilt auch $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}(x) = \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}(y)$ und wegen $(\star)$ somit auch $\langle \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models \psi(w, y//x, y, \bar{z})$. Es folgt

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \exists w \psi(w, y//x, y, \bar{z}),$$

was den Fall (iv) abschließt.
(v) Sei $\phi(x, \bar{z}) = \Diamond \psi(x, \bar{z})$ und $\widetilde{\phi}(x, \bar{z})$ eine zulässige Instanz des Leibniz Schemas. Dann kommt y nach Definition der zulässigen Instanzen nicht unter den freien Variablen $\bar{z}$ vor und die Variable x ist im Wirkungsbereich eines modalen Operators. Die Instanz $\widetilde{\phi}(x, \bar{z})$ ist daher von der Form $(x \doteq y) \rightarrow (\Diamond \psi(x, \bar{z}) \rightarrow \Diamond \psi(y, \bar{z}))$ wobei in $\psi(y, \bar{z}))$ alle Vorkommen von x durch y ersetzt sind. Sei nun $\mathfrak{M}$ ein beliebiges modales Modell, $\mathcal{S}$ eine mögliche Welt in $\mathfrak{M}$ und gelte $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models (x \doteq y) \wedge \Diamond \psi(x, \bar{z})$. Dann gilt also $\upsilon_{\mathcal{S}}(x) = \upsilon_{\mathcal{S}}(y)$ und es existiert in $\mathfrak{M}$ eine mögliche Welt $\mathcal{T}$ und eine $(x, \bar{z})$–Variante $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ von $\upsilon_{\mathcal{T}}$, so daß $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ und $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(x), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x) \rangle \in C$ sowie $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(z_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(z_i) \rangle \in C$ für alle $z_i \in \bar{z}$ gilt und $\langle \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \models \psi(x, \bar{z})$.

Sei nun $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ eine $(y, \bar{z})$–Variante von $\upsilon_{\mathcal{T}}$ mit $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}(y) = \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x)$ und $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}(z_i) = \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(z_i)$. Möglicherweise ist $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x) \neq \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(z_i)$ für alle i. Daher ist die obige Definition von $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ nur zulässig, da y von allen z_i nach Voraussetzung verschieden ist. Die Belegungen $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ und $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ stimmen also auf den freien Variablen von ψ überein und y ist frei für x in $\psi(x, \bar{z})$ (und natürlich sind die z_i frei für z_i). Nach dem Koinzidenzlemma folgt $\langle \mathcal{T}, \widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \models \psi(y, \bar{z})$ und da $\upsilon_{\mathcal{S}}(x) = \upsilon_{\mathcal{S}}(y)$ und $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ eine $(y, \bar{z})$–Variante von $\upsilon_{\mathcal{T}}$ mit $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(u), \widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}(u) \in C$ für alle $u \in y \cup \bar{z}$ ist, folgt $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \Diamond \psi(y, \bar{z})$, was zu zeigen war.

Box–Distribution Seien $\phi(\bar{x})$ und $\psi(\bar{y})$ modale Formeln mit den freien Variablen $\bar{x}$ und $\bar{y}$ respektive und sei angenommen, daß

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models \Box(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{y})) \wedge \Box \phi(\bar{x})$$

gilt. Sei ferner oBdA angenommen, daß eine mögliche Welt $\mathcal{T}$ in $\mathfrak{M}$ und eine CE–Relation C existieren, so daß $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ gilt. Sei dann $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ eine beliebige $\bar{y}$–Variante von $\upsilon_{\mathcal{T}}$, so daß $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(y_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(y_i) \rangle \in C$ für alle $y_i \in \bar{y}$ gilt. Da nun C eine CE–Relation ist, existieren zu Variablen $x_j \in \bar{x} \setminus \bar{y}$ Elemente $\mathbf{a}_j \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}}$, so daß $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(x_j), \mathbf{a}_j \rangle \in C$ gilt. Definiere nun eine $\bar{x} \cup \bar{y}$–Variante $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ von $\upsilon_{\mathcal{T}}$ durch:

$$\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x) = \begin{cases} \mathbf{a}_i & : \text{ falls } x = x_i \in \bar{x} \setminus \bar{y} \\ \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x) & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Dann gilt aber nach Voraussetzung $\langle \mathcal{T}, \widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \vDash (\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{y})) \wedge \phi(\bar{x})$, also auch $\langle \mathcal{T}, \widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \vDash \psi(\bar{y})$. Nun stimmen die Belegungen $\widehat{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ und $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ auf den Variablen in $\bar{y}$ überein, weshalb nach Anwendung des Koinzidenzlemmas $\langle \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \vDash \psi(\bar{y})$ folgt. Dies zeigt, daß in der beliebig vorgegebenen Struktur $\mathcal{S}$ eines modalen Modells $\mathcal{M}$ $\mathcal{S} \vDash \Box(\phi(\bar{x}) \rightarrow \psi(\bar{y})) \rightarrow (\Box\phi(\bar{x}) \rightarrow \Box\psi(\bar{y}))$ gilt.

Es verbleibt zu zeigen, daß die Regeln des Kalküls die Allgemeingültigkeit der Axiome an alle beweisbaren Ausdrücke vererben.

Modus Ponens Seien $\phi \rightarrow \psi$ und ϕ allgemeingültig und sei $\mathcal{S}$ eine Welt eines beliebigen modalen Modells. Dann gilt nach Voraussetzung $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash (\phi \rightarrow \psi) \wedge \phi$ und nach Definition der Modellbeziehung daher auch $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \psi$. Also ist auch ψ allgemeingültig.

Universelle Quantifikation Sei ϕ allgemeingültig, x eine beliebige Variable und sei $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$ eine beliebige x–Variante einer Belegung $\upsilon_{\mathcal{S}}$ in die Struktur $\mathcal{S}$ eines modalen Modells $\mathfrak{M}$. Dann gilt nach Voraussetzung $\langle \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \vDash \phi$ (ϕ allgemeingültig) und da die x–Variante beliebig war somit $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \forall x \phi$.

Necessitation Hier verfährt man ähnlich. Sei $\phi(\bar{x})$ allgemeingültig und sei $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle$ eine mögliche Welt eines modalen Modells $\mathfrak{M}$. Sei angenommen, daß $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ und daß $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(x_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x_i) \rangle \in C$ für alle x_i in $\bar{x}$ gilt. Da ϕ allgemeingültig ist, gilt dann aber $\langle \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \vDash \phi(\bar{x})$ und damit auch $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \Box\phi(\bar{x})$. □

Satz 7.5 (Deduktionstheorem für $\vDash$) *Seien Δ eine Formelmenge und ϕ sowie ψ beliebige Formeln. Dann gilt $\Delta, \phi \vDash \psi$ genau dann, wenn $\Delta \vDash \phi \rightarrow \psi$.*

B e w e i s. Dies ergibt sich direkt aus der Definition von $\vDash$. □

7.4 Kanonische Modelle

Sei $\mathfrak{L}$ im folgenden eine beliebige modale Prädikatenlogik im Sinne von Definition 7.14. Wir werden — ganz ähnlich wie im Fall der modalen Aussagenlogik — zu jeder modalen Prädikatenlogik ein kanonisches Modell $\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}$ konstruieren, von dem wir zunächst nachweisen, daß es ein modales Modell im Sinne der Definition 7.18 ist. Schließlich werden wir zeigen, daß die Theorie $Th(\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}})$ des kanonischen Modells $\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}$ gerade die Logik $\mathfrak{L}$ ist. Ich habe schon zu Beginn des Kapitels 5.2 darauf hingewiesen, daß der Versuch, auf 'kanonische Weise' die Methoden der Vollständigkeitsbeweise der modalen Aussagenlogik und der klassischen Prädikatenlogik zusammenzuführen, auf Schwierigkeiten stößt.

James Garson hat dies treffend zusammengefaßt, weshalb ich eine längere Passage zitieren möchte:

> Notice that the method we described for constructing a free saturated set requires that we have an infinite set of terms of L that are foreign to H. Since we may have infinitely many sentences $\neg\forall x A(x)$ to add, we need infinitely many 'instances' $\neg(E!(t) \rightarrow P(t))$ where t is new to the construction. [...]
>
> Now let us imagine that we hope to prove completeness of a modal logic Q, which adds principles of free logic to the propositional modal logic S. We begin with a Q–consistent set H that we hope to show is Q–satisfiable by extending H to a free saturated set M written in language L. We then hope to construct the canonical model, which will make all sentences of H true at M. Difficulties arise when we try to prove (TL) [Fundamentallemma 7.19]. There is a conflict between what we need to ensure ($\forall$) and what we need to insure ($\Box$). Condition ($\forall$) demands that the set W of possible worlds be the set of saturated sets in language L, for the terms of L (actually their equivalence classes) determine the domain of the quantification of our model. On the other hand, the proof of condition ($\Box$) requires the following. From a given possible world w that contains $\neg\Box B$, we must be able to construct a saturated set w' in language L that is an extension of $w^* = \{A : \Box A \in w\} \cup \{\neg B\}$. The problem is that in order to extend w^* to a saturated set in L, we must find an infinite set of terms of L that do not appear in w^*. However, the world w contains $(P(t) \rightarrow P(t))$ for each term t of L, with the result that all formulas $P(t) \rightarrow P(t)$ appear in w^*. So there are no terms of L foreign to w^*. If we attempt to remedy the problem at this point by constructing world w' in a larger language L', then we find ourselves in a vicious circle. Now we must prove property ($\forall$) for L' instead of L. This forces us to define W as the set of all saturated sets in language L', so that when we want to extend w^* to a saturated set, we must find infinitely many terms of L' foreign to w^*. However, w is now a saturated set in language L', and contains $(P(t) \rightarrow P(t))$ for all terms t of L'. Again, we have no guarantee that there are any terms of L' that do not appear in w^*.
> [Garson 1991], S. 129–130

Dieses Problem wird nun in der unten angegebenen Konstruktion eines kanonischen Modells zu einer beliebig vorgegebenen Logik umgangen. Hierbei machen wir gerade von spezifischen Eigenschaften verallgemeinerter Semantiken Gebrauch, wie die folgenden Ausführungen zeigen werden.

Der Begriff eines *Typs*, insbesondere eines vollständigen Typs, wird sich bei der Konstruktion eines kanonischen Modells als grundlegend erweisen. Zunächst sei aber der Begriff der $\mathfrak{L}$–Konsistenz eingeführt:

Definition 7.21 ($\mathfrak{L}$–Konsistenz) *Eine Menge Δ von modalen Formeln heißt* $\mathfrak{L}$–konsistent *genau dann, wenn für jede endliche Teilmenge Δ_0 von Δ gilt:*

$$\neg(\bigwedge_{\phi\in\Delta_0}\phi)\notin\mathfrak{L}.$$

Die $\mathfrak{L}$–Konsistenz kann auch alternativ mit Hilfe der *lokalen Konsequenzrelation* definiert werden, wie uns das folgende Lemma mitteilt:

Lemma 7.5 *Sei Δ eine Menge modaler Formeln und $\vdash_{\mathfrak{L}}$ die lokale Konsequenzrelation von $\mathfrak{L}$. Dann ist Δ $\mathfrak{L}$–konsistent genau dann, wenn für keine endliche Teilmenge Δ_0 von Δ gilt: $\Delta_0\vdash_{\mathfrak{L}}\bot$.*

B e w e i s. Sei zunächst angenommen, daß die Formelmenge Δ im Sinne von Definition 7.21 $\mathfrak{L}$–konsistent ist. Sei ferner angenommen, daß eine endliche Teilmenge Δ_0 von Δ existiert, so daß $\Delta_0\vdash_{\mathfrak{L}}\bot$. Dann folgt aber, unter Benutzung des Deduktionstheorem, daß

$$\vdash_{\mathfrak{L}}\bigwedge_{\phi\in\Delta_0}\phi\rightarrow\bot$$

gilt, und daher

$$\neg(\bigwedge_{\phi\in\Delta_0}\phi)\vee\bot\in\mathfrak{L}$$

ist. Es ist aber $\bot\notin\mathfrak{L}$ und folglich

$$\neg(\bigwedge_{\phi\in\Delta_0}\phi)\in\mathfrak{L},$$

im Widerspruch zur Annahme der Konsistenz von Δ. Umgekehrt schließt man analog. □

Definition 7.22 (Typen) *Ein* Typ *ist eine $\mathfrak{L}$–konsistente Formelmenge. Ein Typ Δ heißt n–Typ, falls die freien Variablen in Δ unter gegebenen n freien Variablen vorkommen. Ein Typ Δ heißt ω–Typ, falls für jede Variable $x\in Var$ eine Formel in Δ existiert, in der x frei vorkommt. Ein Typ Δ heißt* vollständig, *falls für jede Formel ϕ entweder ϕ oder $\neg\phi$ in Δ liegt.*

Bemerkung 7.2 *Offensichtlich ist jeder vollständige Typ ein ω–Typ. Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, daß das Reden über "Typen" und "Konsistenz" natürlich nur relativ zu einer beliebigen, aber fixierten Logik $\mathfrak{L}$ Sinn ergibt. Aus Gründen der Schlichtheit verzichten wir i. allg. darauf, diese Logik zu erwähnen, da implizit klar ist, daß eine solche zu fixieren ist.*

Lemma 7.6 (Eigenschaften von vollständigen Typen) *Für jeden vollständigen Typ Δ und beliebige Formeln ϕ und ψ gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\mathcal{L} \subset \Delta$

(ii) $(\phi \wedge \psi) \in \Delta$ *genau dann, wenn* $\phi \in \Delta$ *und* $\psi \in \Delta$.

(iii) Δ *ist abgeschlossen unter modus ponens, d.h. sind* ϕ *und* $(\phi \to \psi)$ *in* Δ, *so auch* ψ.

(iv) $\phi \in \Delta$ *genau dann, wenn* $\neg\phi \notin \Delta$.

(v) $(\phi \vee \psi) \in \Delta$ *genau dann, wenn* $\phi \in \Delta$ *oder* $\psi \in \Delta$ *(oder beide).*

(vi) Δ *ist abgeschlossen unter Bikonditionalen, d.h. ist* $(\phi \leftrightarrow \psi) \in \Delta$, *so ist* $\phi \in \Delta$ *genau dann, wenn* $\psi \in \Delta$.

B e w e i s. Standard. □

Belegungen $v_{\mathcal{S}}$ können freien Variablen Werte zuweisen, welche nicht im Quantifikationsbereich $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ eines Modells $\mathcal{M}$ liegen, sondern in $\mathcal{U}_{\mathcal{S}} \setminus \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$. Wir können jedoch durch eine einfache Formel ausdrücken, daß eine Variable einen Wert in $\mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ annimmt.

Definition 7.23 (Existenz–Formel und Existenz–Eigenschaft in Typen) *Sei* x_i *eine Variable mit* $i \neq 0$. *Dann stehe die Abkürzung* $E!(x_i)$ *für die Formel* $\exists x_0(x_0 \doteq x_i)$. *Weiter stehe* $E!(x_0)$ *für die Formel* $\exists x_1(x_1 \doteq x_0)$. *Sind* Δ *ein Typ und* x_i *eine Variable, so sagen wir daß* x_i *in* Δ *die* Existenz–Eigenschaft *hat genau dann, wenn* $E!(x_i) \in \Delta$ *gilt.*

Bemerkung 7.3 *Durch diese Festlegungen sind die Abkürzungen* $E!(x_i), i \geq 0$, *eindeutig bestimmt.*

Lemma 7.7 *Sei* $\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}} \rangle$ *eine beliebige Struktur. Dann gilt:*

$$\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}} \rangle \models E!(x_i) \Longleftrightarrow v_{\mathcal{S}}(x_i) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}.$$

B e w e i s. Sei $y \in Var$ die nach Bemerkung 7.3 eindeutig bestimmte und von x_i verschiedene Variable, so daß die Formel $E!(x_i)$ abkürzend für die Formel $\exists y(y \doteq x_i)$ steht. Dann gilt nach Definition

$$\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}} \rangle \models \exists y(y \doteq x_i)$$

genau dann, wenn eine existentielle y–Variante $\widetilde{v_{\mathcal{S}}}$ von $v_{\mathcal{S}}$ existiert, so daß

$$\langle \mathcal{S}, \widetilde{v_{\mathcal{S}}} \rangle \models (y \doteq x_i).$$

gilt. Dies ist aber äquivalent zu der Annahme, daß ein $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ existiert, so daß $v_{\mathcal{S}}(x_i) = v_y^{\mathbf{a}}(y) = \mathbf{a} \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ gilt. Da y verschieden von x_i ist, ist dies äquivalent zu der Annahme, daß $v_{\mathcal{S}}(x_i) \in D_{\mathcal{S}}$ ist. □

Definition 7.24 (Henkin–Typen und Freie Henkin–Typen) *Ein vollständiger Typ Δ heißt* Henkin–Typ*, falls er die* Henkin–Eigenschaft *(H) hat:*

(H) Für jede $\exists$–Formel $\exists x\phi(x)$ in Δ existiert eine Variable x_i, so daß die Formel $\phi(x_i)$ in Δ liegt, wobei x_i frei für x in $\phi(x)$ ist.

Wir bezeichnen die Menge aller Henkin–Typen mit $Hen_{\mathcal{L}}$. Schließlich heißt ein vollständiger Typ ein Freier Henkin Typ*, falls er die* freie Henkin Eigenschaft *$(\widetilde{H})$ erfüllt:*

$(\widetilde{H})$ Für jede $\exists$–Formel $\exists x\phi(x)$ in Δ existiert eine Variable x_i, so daß sowohl $\phi(x_i) \in \Delta$ als auch $E!(x_i) \in \Delta$ und x_i frei für x in $\phi(x)$ ist.

Die Menge aller freien Henkin–Typen bzgl. der Logik $\mathcal{L}$ bezeichnen wir mit $FHen_{\mathcal{L}}$.

Wir führen noch einige nützliche Terminologie ein. Ist $f : Var \longrightarrow Var$ eine injektive und totale Variablensubstitution, so nennen wir f *treu*. Offenbar ist die Verkettung zweier treuer Substitutionen wieder treu. Wir bezeichnen dann die Menge aller treuen Substitutionen mit *Treu*. Ist weiter Δ eine Menge von modalen Formeln, so bezeichnen wir mit Δ^f die Menge von modalen Formeln, die aus Δ dadurch hervorgeht, daß sämtliche, auch gebundene, Variablen durch ihre Bilder unter f ersetzt werden. Ist $\phi(x)$ in Δ mit freier Variable x und $f(x) = y$, so schreiben wir für die resultierende Formel $\phi^f(y)$. Diese Konstruktion gewährleistet, daß sich für treue Substitutionen f die Formeln ϕ und ϕ^f logisch äquivalent verhalten:[56]

Lemma 7.8 (Übergangslemma) *Ist $\phi(y_1, \ldots, y_n)$ eine modale Formel mit den n freien Variablen $y_1, \ldots, y_n$ und ist f eine treue Substitution mit $f(y_i) = z_i$, so enthält die Formel ϕ^f die n Variablen $z_1, \ldots, z_n$ frei. Ist insbesondere $\mathcal{S}$ eine mögliche Welt eines modalen Modells $\mathfrak{M}$ und bezeichnet $v_{\mathcal{S}} \circ f$ die Belegung $v_{\mathcal{S}} \circ f(x_i) = v_{\mathcal{S}}(f(x_i))$, so gilt:*

(a) $\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}} \circ f \rangle \models \phi(y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow \langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}} \rangle \models \phi^f(z_1, \ldots, z_n)$,

bzw. falls f^{-1} die auf $range(f) \supset \{z_1, \ldots, z_n\}$ definierte partielle Umkehrfunktion von f bezeichne:

(b) $\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}} \rangle \models \phi(y_1, \ldots, y_n) \Longleftrightarrow \langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}} \circ f^{-1} \rangle \models \phi^f(z_1, \ldots, z_n)$.

B e w e i s. Dies ist eine direkte Folgerung aus dem Koinzidenzlemma 7.3 zusammen mit dem Lemma 7.4 über gebundene Umbenennungen. Denn da f eine treue Substitution ist, sind offenbar die Variablen z_i frei in ϕ^f, solange die Variablen y_i frei in ϕ sind, und die Belegungen $v_{\mathcal{S}} \circ f$ und $v_{\mathcal{S}}$ stimmen auf den Variablen y_i und z_i respektive überein. Analoges gilt im Fall (b). Ferner

[56] Insbesondere gilt offenbar $(\phi^f \wedge \psi^f) = (\phi \wedge \psi)^f$ und $\neg(\phi^f) = \neg(\phi)^f$ usw. wobei '=' hier natürlich die Gleichheit von Zeichenketten bezeichne.

unterscheiden sich die Formeln ϕ und ϕ^f lediglich — neben ihren freien Variablen — in der Wahl der gebundenen Variablen. Eine direkte Äquivalenzkette ergibt sich, wenn man eine gebundene Umbenennung in den Formeln ϕ und ϕ^f durchführt, wobei man Variablen v_k wähle, welche weder in ϕ noch in ϕ^f vorkommen. Denn sei $\widetilde{\phi}(\bar{y})$ eine solche gebundene Umbenennung. Dann gilt nach Lemma 7.4 $\langle \mathcal{S}, \upsilon_\mathcal{S} \circ f \rangle \vDash \phi(y_1, \ldots, y_n)$ genau dann, wenn $\langle \mathcal{S}, \upsilon_\mathcal{S} \circ f \rangle \vDash \widetilde{\phi}(y_1, \ldots, y_n)$ gilt. Es ist dann aber z_i frei für y_i in $\widetilde{\phi}$ und $\upsilon_\mathcal{S} \circ f(y_i) = \upsilon_\mathcal{S}(z_i)$. Somit ergibt sich mit Lemma 7.3 $\langle \mathcal{S}, \upsilon_\mathcal{S} \rangle \vDash \widetilde{\phi}(z_1, \ldots, z_n)$. Da f treu ist, können wir eine erneute gebundene Umbenennung durchführen und erhalten $\langle \mathcal{S}, \upsilon_\mathcal{S} \rangle \vDash \phi^f(z_1, \ldots, z_n)$. Die letzten Schlüsse lassen sich offenbar umkehren, womit alles gezeigt ist. □

Die nächsten Lemmata fassen einige Ersetzungs- und Substitutionseigenschaften von Logiken bzw. vollständigen Typen zusammen. Dies ist insbesondere von Belang, da wir im Vollständigkeitsbeweis von syntaktischen Eigenschaften der beliebig fixierten modalen Prädikatenlogik $\mathcal{L}$ ausgiebig Gebrauch machen müssen. Zunächst halten wir die fundamentale Eigenschaft beliebiger Logiken fest, daß Formeln zu ihren gebundenen Umbenennungen *beweisbar* äquivalent sind.

Lemma 7.9 (Gebundene Umbenennung) *Sei $\phi(x, \bar{z})$ eine beliebige modale Formel mit den freien Variablen x und $\bar{z}$ und sei y frei für x in $\phi(x, \bar{z})$ und nicht unter den Variablen $\bar{z}$. Dann ist im Kalkül* **FK** *beweisbar:*

$$\vdash_{FK} \exists x \phi(x, \bar{z}) \leftrightarrow \exists y \phi(y, \bar{z}).$$

B e w e i s. Wir beschränken uns darauf, die Implikation von rechts nach links zu zeigen.

$\vdash_{FK} E!(y) \wedge \phi(y, \bar{z}) \to \exists x \phi(x, \bar{z})$	Mit Tautologie aus E! 2	(1)
$\neg\exists x \phi(x, \bar{z}) \vdash_{FK} \neg E!(y) \vee \neg\phi(y, \bar{z})$	Mit Tautologie aus (1)	(2)
$\neg\exists x \phi(x, \bar{z}) \vdash_{FK} E!(y) \to \neg\phi(y, \bar{z})$	Mit Tautologie aus (2)	(3)
$\neg\exists x \phi(x, \bar{z}) \vdash_{FK} \forall y E!(y) \to \forall y \neg\phi(y, \bar{z})$	da y nicht frei in $\neg\exists x \phi(x, \bar{z})$ ist	(4)
$\neg\exists x \phi(x, \bar{z}) \vdash_{FK} \forall y \neg\phi(y, \bar{z})$	aus (4) mit E! 1	(5)
$\neg\exists x \phi(x, \bar{z}) \vdash_{FK} \neg\exists y \phi(y, \bar{z})$	aus (5) mit Quantorenregel	(6)
$\vdash_{FK} \neg\exists x \phi(x, \bar{z}) \to \neg\exists y \phi(y, \bar{z})$	mit Deduktionstheorem aus (6)	(7)

Umgekehrt schließt man analog. □

Lemma 7.10 *(a) Sei ϕ eine beliebige modale Aussage (also $FV(\phi) = \emptyset$) und f eine treue Substitution. Dann ist die Formel $(\phi \leftrightarrow \phi^f) \in \mathcal{L}$ und insbesondere $\phi \in \mathcal{L}$ genau dann, wenn $\phi^f \in \mathcal{L}$.*
(b) Andererseits gilt auch für beliebige modale Formeln $\phi(\bar{x})$ mit $\emptyset \neq FV(\phi) \subseteq \bar{x}$, daß $\phi(\bar{x}) \in \mathcal{L}$ genau dann gilt, wenn $\phi^f(f(\bar{x})) \in \mathcal{L}$ gilt. Im allgemeinen ist jedoch, falls $FV(\phi) \neq \emptyset$ gilt, $\phi \leftrightarrow \phi^f \notin \mathcal{L}$.

B e w e i s. Teil (a) folgt im wesentlichen aus dem Lemma 7.9 über gebundene Umbenennungen. Zu Teil (b) sei angenommen, daß $\phi(\bar{x})$ eine modale Formel mit den freien Variablen $\bar{x}$ sei und f eine treue Substitution. Sei weiter zunächst angenommen, daß $\phi(\bar{x}) \in$ **FK** sei. Dann existiert ein Beweis von $\phi(\bar{x})$ in **FK**, das heißt eine endliche Folge $\psi_1, \ldots, \psi_m$ von Formeln, so daß $\psi_m = \phi(\bar{x})$ ist und für jedes $i < m$, ψ_i entweder ein Axiom des Kalküls **FK** ist oder Formeln ψ_j bzw. ψ_j, ψ_k $(j, k < i)$ existieren, so daß ψ_i aus einer Anwendung einer der Regeln des Kalküls hervorgeht. Wir zeigen, daß die Folge $\psi_1^f, \ldots, \psi_m^f$ ein Beweis von $\phi^f(f(x_1), \ldots, f(x_n))$ ist.

Ist ψ_i ein Axiom, so ist offenbar auch ψ_i^f eine gültige Instanz eines Axiomenschemas. Betrachten wir exemplarisch das Leibniz Schema: Sei

$$\psi_i = (x \doteq y) \rightarrow (\chi(x, \bar{z}) \rightarrow \chi(y//x, \bar{z}))$$

eine zulässige Instanz, d.h. y ist frei für x in $\chi(x, \bar{z})$ und nicht im Wirkungsbereich eines modalen Operators. Dann ist in der Formel

$$\psi_i^f = (f(x) \doteq f(y)) \rightarrow (\chi^f(f(x), f(\bar{z})) \rightarrow \chi^f(f(y)//f(x), f(\bar{z})))$$

wie man sich leicht überlegt die Variable $f(y)$ frei für $f(x)$ in $\chi^f(f(x), f(\bar{z}))$ und $f(y)$ nicht im Wirkungsbereich eines modalen Operators. D.h. ψ_i^f ist Instanz des Leibniz Schemas. Anwendungen der Regeln Modus Ponens und Necessitation sind offenbar unproblematisch. Haben wir die Formel ψ_i aus ψ_j durch Anwendung der Regel der universellen Quantifikation erhalten, d.h. $\psi_i = \forall x \psi_j$, so wenden wir auf ψ_j^f dieselbe Regel mit der Variablen $f(x)$ an und erhalten $\psi_i^f = \forall f(x) \psi_i^f$. Dies zeigt, daß dann auch $\phi^f(f(\bar{x})) \in \mathfrak{L}$ ist. Umgekehrt argumentiert man analog.
Ist schließlich $\phi(\bar{x}) \in \mathfrak{L} \setminus \mathbf{FK}$, so ergibt sich die Behauptung unmittelbar aus der Tatsache, daß $\mathfrak{L}$ unter erststufigen Substitutionen abgeschlossen ist. Hierzu führe man zunächst eine gebundene Umbenennung von $\phi(\bar{x})$ zu $\widetilde{\phi}(\bar{x})$ durch, so daß die Variablen $f(x_i)$ frei für x_i in $\widetilde{\phi}(\bar{x})$ sind. Da nun nach Lemma 7.9 $\widetilde{\phi}(\bar{x}) \in \mathfrak{L}$ ist, folgt durch erststufige Substitution $\widetilde{\phi}(f(\bar{x})) \in \mathfrak{L}$. Da nun f eine treue Substitution ist, können wir erneut gebunden umbenennen und erhalten $\phi^f(f(\bar{x})) \in \mathfrak{L}$. □

Lemma 7.11 (Substitutionseigenschaften von Typen)
(a) Ist $\phi \in \mathfrak{L}$, so ist für jede treue Substitution f und jeden vollständigen Typ Δ die Formel ϕ^f in Δ.
(b) Ist insbesondere ϕ eine modale Formel mit freien Variablen und $f \in Treu$ mit $f|_{FV(\phi)} \equiv id$, so gilt $\phi^f \in \Delta$ genau dann, wenn $\phi \in \Delta$. Mit anderen Worten, ein vollständiger Typ ist abgeschlossen gegenüber beliebigen (injektiven) Umbenennungen gebundener Variablen.
(c) Ist zudem $(x_i \doteq y_i) \in \Delta$ für $i = 1, \ldots, n$ und $FV(\phi) = \{x_1, \ldots, x_n\}$, so gilt für jedes $f \in Treu$ mit $f(x_i) = y_i$:

$$\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta \Longleftrightarrow \phi^f(y_1, \ldots, y_n) \in \Delta.$$

Insbesondere gilt dann $\phi \leftrightarrow \phi^f \in \Delta$

B e w e i s. Teil (a) folgt sofort aus Lemma 7.10 und (b) aus dem Lemma 7.9. Zum Beweis von (c) sei angenommen, daß $(x_i \doteq y_i) \in \Delta$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, $\phi(\bar{x})$ eine modale Formel mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ sei und $f \in Treu$

ist mit $f(x_i) = y_i$. Sei zunächst $\widetilde{\phi}(\bar{x})$ eine gebundene Umbenennung von $\phi(\bar{x})$, so daß y_i frei für x_i in $\widetilde{\phi}(\bar{x})$ ist. Nach Teil (b) ist dann $\phi(\bar{x}) \in \Delta$ genau dann, wenn $\widetilde{\phi}(\bar{x}) \in \Delta$. Nun folgt aus dem Leibniz Schema, daß die Formel

$$\bigwedge_{i=1}^{n}(x_i \doteq y_i) \to (\widetilde{\phi}(\bar{x}) \to \widetilde{\phi}(\bar{y})) \qquad (*)$$

zur Logik $\mathfrak{L}$ gehört. Da aber nach Lemma 7.6 die Formel $\bigwedge_{i=1}^{n}(x_i \doteq y_i)$ zu Δ gehört, folgt mit $(*)$, daß $\phi(\bar{x}) \in \Delta$ genau dann, wenn $\widetilde{\phi}(\bar{y}) \in \Delta$. Nun ist aber die Formel $\phi^f(\bar{y})$ wieder eine zulässige gebundene Umbenennung der Formel $\widetilde{\phi}(\bar{y}) \in \Delta$, womit sich die Behauptung ergibt. $\square$

Bemerkung 7.4 *Offensichtlich ist jeder freie Henkin–Typ zugleich ein Henkin–Typ. Daher beweisen wir im folgenden Lemma insbesondere auch die Existenz von Henkin–Typen.*

Lemma 7.12 (Existenz freier Henkin–Typen) *Für jeden Typ Δ und beliebige* endliche *Listen $y_1, \ldots, y_m$ und $z_1, \ldots, z_m$ von jeweils m paarweise verschiedenen Variablen existiert eine treue Substitution $f : Var \longrightarrow Var$, mit $f(y_i) = z_i$ für $i = 1, \ldots, m$ und ein freier Henkin–Typ Γ, so daß*

$$\Delta^f := \{\phi^f(\bar{v}) \mid \phi(\bar{u}) \in \Delta \text{ und } f(\bar{u}) = \bar{v}\} \subseteq \Gamma,$$

wobei $f(\bar{u}) = \bar{v}$ abkürzend für $f(u_i) = v_i, i = 1, \ldots, n$ stehe.

B e w e i s. Der Beweis verläuft in folgenden Schritten. Zunächst legen wir eine Aufzählung der wohlgebildeten Formeln und eine treue Substitution f mit den gewünschten Eigenschaften fest. Sodann definieren wir induktiv eine Folge $\langle \Gamma_{-1}, \langle \Gamma_i : i \in \omega \rangle \rangle$ von konsistenten Formelmengen, so daß $\Gamma := \bigcup_{(i+1) \in \omega} \Gamma_i$ die geforderten Eigenschaften hat.
Sei also $\pi : \omega \longrightarrow \mathbb{ML}$ eine Aufzählung aller (wohlgeformten) modalen Formeln in der Sprache $\mathbb{ML}$. Sei weiter $\langle x_i : i \in \omega \rangle$ die Standardaufzählung der abzählbar vielen Variablen in $\mathbb{ML}$. Da die vorgegebenen Variablenlisten endlich sind, existieren $k, l \in \omega$, so daß $\{y_1, \ldots, y_m\} \subset \{x_1, \ldots, x_k\}$ und $\{z_1, \ldots, z_m\} \subset \{x_1, \ldots, x_l\}$. Sei dann f wie folgt definiert:

$$f(x) = \begin{cases} z_i & : \text{ falls } x = y_i \text{ (für } i \in \{1, \ldots, m\}) \\ x_{l+2i+1} & : \text{ falls } x = x_i \text{ und } x \neq y_i \text{ für } i = 1, \ldots, m \end{cases}$$

Da die Variablen y_i alle verschieden sind, ist diese Funktion offenbar injektiv und insbesondere aufgrund ihrer Definition auch total, d.h. eine treue Variablensubstitution. Für spätere Referenz halten wir hier fest, daß

$$range(f) \subset \{z_1, \ldots, z_n\} \cup \{x_{l+2i+1} \mid i \in \omega\}$$

ist, also insbesondere unendlich viele Variablen, nämlich solche der Form $x_{l+2\cdot(i+1)}$ für $i \in \omega$ beliebig, nicht im Bild von f auftauchen.

Wir kommen nun zur induktiven Definition der Formelmengen Γ_n. Wir setzen zunächst:

$$\Gamma_{-1} := \Delta^f.$$

Sei dann angenommen, daß Γ_{n-1} bereits definiert ist und daß $\pi(n)$ die n–te Formel in der Aufzählung der wohlgebildeten Formeln in $\mathbb{ML}$ ist. Dann wird die Menge Γ_n durch eine vollständige Fallunterscheidung in drei Fälle wie folgt definiert:

(i) Ist $\Gamma_{n-1} \cup \{\pi(n)\}$ $\mathfrak{L}$–konsistent und $\pi(n)$ keine $\exists$–Formel, so definieren wir:

$$\Gamma_n := \Gamma_{n-1} \cup \{\pi(n)\}.$$

(ii) Angenommen $\Gamma_{n-1} \cup \{\pi(n)\}$ ist $\mathfrak{L}$–konsistent und $\pi(n)$ ist eine $\exists$–Formel der Form $\exists x \phi(x, x_{i_1}, \ldots, x_{i_j})$. Dann sei Γ_n definiert als:

$$\Gamma_n := \{\phi(x_i, x_{i_1}, \ldots, x_{i_j}), E!(x_i), \pi(n)\} \cup \Gamma_{n-1},$$

wobei $x_i \in$ *Var* die erste Variable in der Standardaufzählung sei, welche nicht unter den (freien oder gebundenen) Variablen von $\Gamma_{n-1} \cup \pi(n)$ auftaucht. Alternativ könnte man hier auch konkret die Variable $x_{l+2(n+1)}$ wählen.

(iii) Ist schließlich $\Gamma_{n-1} \cup \{\pi(n)\}$ $\mathfrak{L}$–inkonsistent, so definieren wir

$$\Gamma_n := \Gamma_{n-1} \cup \{\neg\pi(n)\}.$$

(Dann ist insbesondere $\neg\pi(n)$ keine $\exists$–Formel, wenngleich sie $\mathfrak{L}$–äquivalent zu einer solchen sein kann.)

Damit ist offenbar Γ_n für jedes $n \in \omega \cup \{-1\}$ induktiv definiert und wir setzen weiter:

$$\Gamma := \bigcup_{i \in \{-1\} \cup \omega} \Gamma_i.$$

Wir behaupten nun zunächst:

(a) Die Formelmengen Γ_n sind konsistent für jedes n.

Dies beweisen wir induktiv. Sei zunächst Γ_{-1} betrachtet. Nach Voraussetzung ist Δ, da es sich um einen *Typ* handelt, per definitionem $\mathfrak{L}$–konsistent. Weiter haben wir schon festgestellt, daß f eine *treue* Substitution ist. Demnach ist, mit Lemma 7.10, die Menge Δ^f ebenfalls $\mathfrak{L}$–konsistent und somit die Behauptung für $n = -1$ gezeigt. Sei nämlich angenommen Δ^f wäre $\mathfrak{L}$–inkonsistent. Dann existierten endlich viele Formeln ϕ_i^f, $i = 1, \ldots, m$ aus Δ^f, so daß

$$\bigwedge_{i \leq m} \phi_i^f \vdash_{\mathfrak{L}} \bot .$$

Dann ist aber nach dem Deduktionstheorem

$$(\bigwedge_{i \leq m} \phi_i^f \rightarrow \bot) \in \mathfrak{L}$$

und daher mit Lemma 7.10 auch

$$(\bigwedge_{i \leq m} \phi_i \rightarrow \perp) \in \mathfrak{L}.$$

Dies heißt aber, daß Formeln ϕ_i, $i = 1, \ldots, m$ aus Δ existieren, so daß

$$\bigwedge_{i \leq m} \phi_i \vdash_{\mathfrak{L}} \perp .$$

Dann wäre Δ aber $\mathfrak{L}$–inkonsistent im Widerspruch zur Voraussetzung.
Sei nun vorausgesetzt, daß Γ_{n-1} $\mathfrak{L}$–konsistent ist. Wir haben in den drei möglichen Fällen (i), (ii) und (iii) der Definition von Γ_n die $\mathfrak{L}$–Konsistenz nachzuweisen.
ad (i) Dieser Fall ist trivial.
ad(ii) Wir nehmen an, Γ_n wäre $\mathfrak{L}$–inkonsistent. Dies heißt:

$$\Gamma_{n-1}, \{\exists x \phi(x, \bar{y}), E!(x_i), \phi(x_i, \bar{y})\} \vdash_{\mathfrak{L}} \perp .$$

Dann folgt aber nach zweimaliger Anwendung des Deduktionstheorems (unter Benutzung von $((\phi \rightarrow \perp) \leftrightarrow \neg\phi) \in \mathfrak{L}$):

$$\Gamma_{n-1}, \exists x \phi(x, \bar{y}) \vdash_{\mathfrak{L}} E!(x_i) \rightarrow \neg\phi(x_i, \bar{y}).$$

Nach dem Endlichkeitssatz 7.2 existiert dann eine endliche Teilmenge Γ^0_{n-1} von Γ_{n-1}, so daß

$$\vdash_{\mathfrak{L}} \Big(\bigwedge \Gamma^0_{n-1} \wedge \exists x \phi(x, \bar{y}) \Big) \rightarrow (E!(x_i) \rightarrow \neg\phi(x_i, \bar{y})).$$

Nun kann man allquantifizieren und erhält nach Anwendung der universellen Distribution:

$$\vdash_{\mathfrak{L}} \forall x_i \Big(\bigwedge \Gamma^0_{n-1} \wedge \exists x \phi(x, \bar{y}) \Big) \rightarrow \forall x_i (E!(x_i) \rightarrow \neg\phi(x_i, \bar{y})).$$

Stehe nun χ für die Formel $\Big(\bigwedge \Gamma^0_{n-1} \wedge \exists x \phi(x, \bar{y}) \Big)$. Nach Voraussetzung kommt die Variable x_i in χ nicht frei vor. Daher ist nach dem Axiom der hinteren Generalisierung die Formel $\chi \rightarrow \forall x_i \chi$ in $\mathfrak{L}$. Ferner ist die Formel

$$\forall x_i \chi \rightarrow \forall x_i (E!(x_i) \rightarrow \neg\phi(x_i, \bar{y}))$$

nach Annahme und dem bisher bewiesenen in $\mathfrak{L}$. Weiter ist bekanntlich die Formel

$$(\chi \rightarrow \forall x_i \chi \wedge \forall x_i \chi \rightarrow \psi) \rightarrow (\chi \rightarrow \psi)$$

eine Instanz einer Tautologie. Also können wir, indem wir modus ponens anwenden, das erste Auftreten des Quantors $\forall x_i \ldots$ eliminieren und schließen, daß die Formel $\Big(\bigwedge \Gamma^0_{n-1} \wedge \exists x \phi(x, \bar{y}) \Big) \rightarrow \forall x_i (E!(x_i) \rightarrow \neg\phi(x_i, \bar{y}))$ in $\mathfrak{L}$ beweisbar ist. Dann gilt aber auch:

$$\Gamma_{n-1}, \exists x \phi(x, \bar{y})) \vdash_{\mathfrak{L}} \forall x_i (E!(x_i) \rightarrow \neg\phi(x_i, \bar{y})).$$

Eine erneute Anwendung der universellen Distribution liefert:

$$\Gamma_{n-1}, \exists x\phi(x, \bar{y})) \vdash_{\mathfrak{L}} \forall x_i E!(x_i) \to \forall x_i \neg\phi(x_i, \bar{y}).$$

Die Formel $\forall x_i E!(x_i)$ ist aber ein Axiom von $\mathfrak{L}$, weshalb mit modus ponens

$$\Gamma_{n-1}, \exists x\phi(x, \bar{y})) \vdash_{\mathfrak{L}} \forall x_i \neg\phi(x_i, \bar{y})$$

folgt. Eine einfache Quantorenregel ergibt:

$$\Gamma_{n-1}, \exists x\phi(x, \bar{y})) \vdash_{\mathfrak{L}} \neg\exists x_i \phi(x_i, \bar{y}).$$

Nach Lemma 7.11 ist $\mathfrak{L}$ jedoch unter gebundenen Umbenennungen abgeschlossen. Demnach gilt auch:

$$\Gamma_{n-1}, \exists x\phi(x, \bar{y}) \vdash_{\mathfrak{L}} \neg\exists x\phi(x, \bar{y}),$$

so daß also die Menge

$$\Gamma_{n-1} \cup \{\exists x\phi(x)\}$$

$\mathfrak{L}$–inkonsistent ist, im Widerspruch zur Annahme. Also ist Γ_n in Fall (ii) $\mathfrak{L}$–konsistent, was zu zeigen war.
ad(iii) Sei die Menge $\Gamma_{n-1} \cup \{\pi(n)\}$ $\mathfrak{L}$–inkonsistent. Sei dann weiter angenommen, daß auch Γ_n $\mathfrak{L}$–inkonsistent wäre. Aus der ersten Annahme folgt

$$\Gamma_{n-1} \vdash_{\mathfrak{L}} \neg\pi(n)$$

und aus der zweiten analog

$$\Gamma_{n-1} \vdash_{\mathfrak{L}} \pi(n)$$

so daß Γ_{n-1} $\mathfrak{L}$–inkonsistent wäre, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist auch in Fall (iii) Γ_n $\mathfrak{L}$–konsistent.
Wir haben also gezeigt, daß die Formelmengen Γ_n für alle n $\mathfrak{L}$–konsistent sind. Kommen wir nun zum Beweis, daß die Formelmenge Γ die gewünschten Eigenschaften hat.

(b) Die Formelmenge Γ ist maximal konsistent, d.h. ein vollständiger Typ.

Angenommen Γ wäre nicht $\mathfrak{L}$–konsistent. Dann existierten endlich viele Formeln $\phi_i \in \Gamma$ $(i = 1, \ldots, m)$, so daß:

$$\neg(\bigwedge_{i \leq m} \phi_i) \in \mathfrak{L} \quad (*)$$

gilt. Nach Konstruktion existieren aber in diesem Fall zunächst gewisse $k(i)$, so daß $\phi_i \in \Gamma_{k(i)}$ ist. Nun ist aber die Folge der Γ_n offenbar — nach Konstruktion — linear geordnet, d.h. für $k(i), k(j) < \omega$ gilt:

$$\Gamma_{k(i)} \subset \Gamma_{k(j)} \text{ oder } \Gamma_{k(i)} \supset \Gamma_{k(j)}.$$

Dann folgt aber, daß unter den Indizes $k(1), \ldots, k(m)$ ein Index $k(i_0)$ vorkommt, so daß:

$$\Gamma_{k(i_0)} = \bigcup_{i \leq m} \Gamma_{k(i)}.$$

Dies bedeutet aber, daß alle Formeln ϕ_i, $i = 1, \ldots, m$, in $\Gamma_{k(i_0)}$ liegen, weshalb dann wegen $(*)$ auch $\Gamma_{k(i_0)}$ $\mathfrak{L}$–inkonsistent wäre, im Widerspruch zu (a). Es folgt, daß die Formelmenge Γ zumindest $\mathfrak{L}$–konsistent ist. Zu zeigen bleibt die Maximalität. Diese ergibt sich aber unmittelbar aus der Konstruktion. Denn geben wir uns konkret eine beliebige Formel $\phi \in \mathbb{ML}$ vor, so existiert, da die Aufzählung $\pi : \omega \longrightarrow \mathbb{ML}$ alle wohlgeformten Ausdrücke durchläuft, eine Zahl n, so daß $\pi(n) = \phi$. Dann wird aber im n–ten Konstruktionsschritt die Formelmenge Γ_n so definiert, daß entweder die Formel ϕ oder die Formel $\neg\phi$ zu Γ_n — und damit zu Γ — gehört. Also ist Γ ein vollständiger Typ.

Es bleibt zu zeigen, daß Γ die freie Henkin–Eigenschaft hat und die genannte Zusatzbedingung erfüllt.

(c) Γ ist freier Henkin–Typ und erfüllt insbesondere $\Delta^f \subset \Gamma$.

Der zweite Teil der Behauptung ist trivial. Da $\Gamma_{-1} := \Delta^f$ ist, folgt unmittelbar, daß $\Delta^f \subset \Gamma$.
Zum Nachweis der freien Henkin–Eigenschaft sei angenommen, daß $\exists x\phi(x)$ in Γ liegt. Dann existiert eine Zahl n, so daß $\pi(n) = \exists x\phi(x)$ gilt. Demnach wird im n–ten Konstruktionsschritt entschieden, ob diese Formel zu Γ gehören soll oder nicht. Aber da nach Annahme $\exists x\phi(x) \in \Gamma$ gelten soll, tritt hier offenbar Fall (ii) ein; denn $\Gamma_{n-1} \cup \{\pi(n)\}$ ist $\mathfrak{L}$–konsistent, da Γ $\mathfrak{L}$–konsistent ist — und $\pi(n)$ ist eine $\exists$–Formel. Dann wird aber im n–ten Schritt eine Variable x_i ausgewählt, die frei für x in $\phi(x)$ ist und es werden die Formeln $E!(x_i)$ und $\phi(x_i)$ der Formelmenge Γ_n (also auch Γ) hinzugefügt. Also hat Γ die freie Henkin–Eigenschaft, was den Beweis des Lemmas abschließt. □

Wirft man einen scharfen Blick auf den vorangehenden Beweis, so stellt man fest, daß das für die Möglichkeit der Konstruktion eines freien Henkin–Typs Γ entscheidende Merkmal der angegebenen treuen Variablensubstitution f diejenige Eigenschaft war, daß unendlich viele Variablen *nicht* im Bild von f auftauchten. Dies gewährleistete, daß für jede existentielle Formel in Δ — und dies können unendlich viele sein — eine Variable in $\mathit{Var} \setminus \mathit{range}(f)$ gefunden werden konnte, welche dann als *Zeuge* dieser existentiellen Formel diente. Wir können daher das vorangehende Lemma noch einmal verallgemeinern.

Hierzu führen wir zunächst noch ein Häppchen Terminologie ein. Wir nennen eine Variablensubstitution f *großzügig* genau dann, wenn f treu ist und $\mathit{range}(f)$ ko–unendlich ist, d.h. wenn $\mathit{Var} \setminus \mathit{range}(f)$ unendlich ist. Ist uns dann ein Typ Δ gegeben, so ist die Konstruktion aus dem Beweis des Lemmas 7.8 für *jede beliebige* großzügige Variablensubstitution f durchführbar. Ist darüber hinaus die Variablenmenge $\mathit{Var}(\Delta)$ ko–unendlich, so können wir f auf den in Δ auftauchenden Variablen offenbar sogar als Identität wählen. Wir formulieren also das folgende Korollar:

Korollar 7.1 *Für jeden Typ Δ und jede großzügige Variablensubstitution f existiert ein freier Henkin–Typ Γ, so daß $\Delta^f \subset \Gamma$ gilt. Ist insbesondere $\mathit{Var}(\Delta)$ ko–unendlich, so kann f auf $\mathit{Var}(\Delta)$ als Identität gewählt werden.* □

Dies wird sich insbesondere dann als nützlich erweisen, wenn man einen freien

Henkin–Typ Γ angeben möchte, der eine vorgegebene konsistente und unendliche Menge von Formeln umfaßt.

Als nächsten Schritt in Richtung der Konstruktion eines kanonischen Modells müssen wir angeben, wie wir aus dem syntaktischen Material eines freien Henkin–Typs die Individuen — "existente" wie "mögliche" — einer Struktur der freien Logik konstruieren wollen. Um die Unterscheidung zwischen Individuen des Quantifikationsbereichs und solchen die im Universum, aber außerhalb des Quantifikationsbereichs liegen, einzufangen, definieren wir zunächst zwei Relationen $\sim_\Delta$ und $\approx_\Delta$ wie folgt:

Definition 7.25 (Klassen von Variablen) *Sei Δ ein vollständiger Typ. Wir definieren zugehörige binäre Relationen $\sim_\Delta$ und $\approx_\Delta$ auf der Menge der Variablen wie folgt:*

($\sim_\Delta$) $x_i \sim_\Delta x_j :\Longleftrightarrow (x_i \doteq x_j) \in \Delta$, *sowie*

($\approx_\Delta$) $x_i \approx_\Delta x_j :\Longleftrightarrow x_i \sim_\Delta x_j$ *und* $E!(x_i), E!(x_j) \in \Delta$.

Die Klassen von Variablen $[x_i]^\sim_\Delta$ und $[x_i]^\approx_\Delta$ seien dann respektive definiert durch $[x_i]^\sim_\Delta := \{x_j \mid x_i \sim x_j\}$ und $[x_i]^\approx_\Delta := \{x_i \mid x_i \approx x_j\}$.

Bemerkung 7.5 *Ist Δ ein vollständiger Typ, so folgt aus der Annahme, daß $(x_i \doteq x_j) \in \Delta$ und $E!(x_i) \in \Delta$ bereits, daß auch $E!(x_j) \in \Delta$. Dies ergibt sich aus $(x_i \doteq x_j) \wedge E!(x_i) \rightarrow E!(x_j) \in \mathfrak{L}$ (Identitätsaxiom). Die obige Bedingung ($\approx_\Delta$) kann also dementsprechend abgeschwächt werden.*

Lemma 7.13 (Eigenschaften von $\sim_\Delta$ und $\approx_\Delta$.) *Es sei Δ ein vollständiger Typ. Es gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $\sim_\Delta$ *ist eine Äquivalenzrelation, d.h. reflexiv, symmetrisch und transitiv. Daher partitioniert $\sim_\Delta$ die Menge der Variablen in nicht–leere Äquivalenzklassen.*

(ii) $\approx_\Delta$ *ist symmetrisch und transitiv, jedoch im allgemein weder reflexiv noch anti–reflexiv.*

(iii) Die Klassen $[x_i]^\sim_\Delta$ und $[x_i]^\approx_\Delta$ sind wohldefiniert, d.h. unabhängig von der Auswahl eines Repräsentanten.

(iv) $x_i \approx_\Delta x_j \Longrightarrow x_i \sim_\Delta x_j$

(v) Falls $E!(x_i) \in \Delta$, so ist $[x_i]^\sim_\Delta = [x_i]^\approx_\Delta \neq \emptyset$. Insbesondere folgt, daß eine Variable x aus $[x_i]^\sim_\Delta$ die Existenz–Eigenschaft in Δ hat genau dann, wenn alle Variablen aus $[x_i]^\sim_\Delta$ sie haben.

(vi) Ist $E!(x_i) \notin \Delta$, so ist $[x_i]^\approx_\Delta = \emptyset$. Es gilt jedoch stets $[x_i]^\sim_\Delta \neq \emptyset$.

B e w e i s. ad (i) Angenommen $x_i \sim_\Delta x_j$, d.h. $(x_i \doteq x_j) \in \Delta$. Da nach Lemma 7.6 $\mathcal{L} \subset \Delta$ ist und $(x_i \doteq x_j) \rightarrow (x_j \doteq x_i) \in \mathcal{L}$, ist aufgrund der Abgeschlossenheit von Δ unter modus ponens auch $(x_j \doteq x_i) \in \Delta$. Dies zeigt die Symmetrie von $\sim_\Delta$. Völlig analog zeigt man die Reflexivität und Transitivität von $\sim_\Delta$ mit Hilfe der allgemeingültigen Formeln $(x \doteq x)$ und $(x_i \doteq x_j) \wedge (x_j \doteq x_k) \rightarrow (x_i \doteq x_k)$ (für beliebige Variablen x, x_i, x_j, x_k) respektive.

ad (ii) Symmetrie und Transitivität von $\approx_\Delta$ ergeben sich unmittelbar aus (i). Die Relation $\approx_\Delta$ ist aber im allgemeinen weder reflexiv noch anti–reflexiv, da vollständige Typen Δ existieren, so daß für eine Variable x_i die Formel $E!(x_i) \in \Delta$ ist, jedoch für eine andere Variable x_j $E!(x_j) \notin \Delta$ gilt. Hierzu brauchen wir nur den vollständigen Typ Δ eines Modells $\mathcal{M} = \langle \mathcal{S}, v \rangle$ zu betrachten, so daß $v(x_i) \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$ ist und $v(x_j) \in \mathcal{U}_\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}_\mathcal{S}$.

ad (iii) Für $\sim_\Delta$ folgt dies aus (i). Andererseits reichen Symmetrie und Transitivität, wie man sich leicht überzeugt, bereits aus, um zu zeigen, daß aus $[x_i]^\approx_\Delta \cap [x_j]^\approx_\Delta \neq \emptyset$ die Gleichheit der Klassen folgt.

ad (iv) Dies ist offensichtlich. Siehe auch Bemerkung 7.5.

ad (v) Sei $E!(x_i) \in \Delta$. Aus (iv) folgt zunächst $[x_i]^\approx_\Delta \subset [x_i]^\sim_\Delta$. Ist andererseits $x_j \in [x_i]^\sim_\Delta$, so folgt aus Bemerkung 7.5, daß $E!(x_j) \in \Delta$, weshalb auch $x_j \in [x_i]^\approx_\Delta$ gilt.

ad (vi) Dies folgt direkt aus der Definition und aus (i). □

Bemerkung 7.6 *Die Relation $\approx_\Delta$ nennen wir, da sie symmetrisch und transitiv, jedoch nicht notwendig reflexiv ist, eine* para–Äquivalenzrelation. *Aufgrund von Teil* (v) *des obigen Lemmas können wir ohne Mehrdeutigkeit auch davon sprechen, daß eine Klasse $[x]_\Delta$ die Existenz–Eigenschaft in Δ hat.*

Wir kommen nun zur Definition des kanonischen modalen Modells $\mathfrak{M}_\mathcal{L}$. Es wird sich zeigen, daß jeder freie Henkin–Typ Δ auf eindeutige Weise eine freie Logik–Struktur $\mathcal{S}_\Delta$ und eine *kanonische Belegung* v_Δ induziert, die zusammen ein freies Henkin Modell $\mathcal{M}_\Delta = \langle \mathcal{S}_\Delta, v_\Delta \rangle$ konstituieren. Aus diesem *syntaktischen* Material wird schließlich das kanonische modale Modell zusammengesetzt.

Zunächst haben wir für einen gegebenen freien Henkin–Typ Δ ein lokales Diskursuniversum, d.h. ein "Universum" und einen Quantifikationsbereich, sowie eine Interpretation der Relationssymbole anzugeben.

Definition 7.26 (Kanonische Gegenstandsbereiche) *Sei Δ ein freier Henkin–Typ. Wir definieren das Universum $\mathcal{U}_\Delta$ als: $\mathcal{U}_\Delta := \{[x_i]^\sim_\Delta \mid x_i \in Var\}$. Der Quantifikationsbereich $\mathcal{D}_\Delta$ sei dann die Menge $\{[x_i]^\approx_\Delta \neq \emptyset \mid x_i \in Var\}$ oder, äquivalent nach Lemma 7.13, $\{[x_i]^\sim_\Delta \mid x_i \in Var$ und $E!(x_i) \in \Delta\}$. Das globale Diskursuniversum $\bigcup_{\Delta \in FHen} \mathcal{U}_\Delta$ sei schließlich wieder mit $\mathfrak{Du}_\mathcal{L}$ bezeichnet.*

Bemerkung 7.7 *Offenbar ist also $\mathcal{D}_\Delta \subset \mathcal{U}_\Delta$ und alle $[x_i]^\sim_\Delta$ aus $\mathcal{U}_\Delta$ sind nicht–leer. Wir verzichten in Zukunft auf die Erwähnung der Relationen $\sim$ und $\approx$, da ein Element $[x_i]_\Delta$ aus $\mathcal{D}_\Delta$ eindeutig dadurch ausgezeichnet wird, daß $E!(x_i) \in \Delta$ ist.*

Definition 7.27 (Kanonische Interpretation) *Seien Δ ein freier Henkin–Typ, R ein n–stelliges Relationssymbol der Sprache $\mathbb{ML}$ und $y_1, \ldots, y_n$ n beliebige Variablen. Wir definieren dann eine n–stellige Relation R^Δ auf dem n–stelligen kartesischen Produkt von $\mathcal{U}_\Delta$ durch:*

$$\langle [y_1]_\Delta, \ldots, [y_n]_\Delta \rangle \in R^\Delta :\Longleftrightarrow R(y_1, \ldots, y_n) \in \Delta$$

Lemma 7.14 *Die Definition der Relation R^Δ ist repräsentantenunabhängig. Mit anderen Worten, falls $[x_{i_k}]_\Delta = [x_{j_k}]_\Delta$ für $k = 1, \ldots, n$ gilt, so folgt $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in \Delta \Longleftrightarrow R(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \in \Delta$.*

B e w e i s. Sei R ein n–stelliges Relationssymbol und sei Δ ein freier Henkin–Typ. Seien ferner $[x_{i_k}]_\Delta = [x_{j_k}]_\Delta$ für $k = 1, \ldots, n$, d.h. die x_{i_k} und x_{j_k} verschiedene Repräsentanten derselben Klassen aus $\mathcal{U}_\Delta$. Wir haben nun zu zeigen, daß die Relation R^Δ genau dann auf $\langle [x_{i_1}]_\Delta, \ldots, [x_{i_n}]_\Delta \rangle$ zutrifft, wenn sie auf $\langle [x_{j_1}]_\Delta, \ldots, [x_{j_n}]_\Delta \rangle$ zutrifft. Mit anderen Worten, wir haben die Äquivalenz

$$R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in \Delta \Longleftrightarrow R(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}) \in \Delta$$

zu zeigen. Zunächst ist aber nach Annahme $(x_{i_k} \doteq x_{j_k}) \in \Delta$ für $k = 1, \ldots, n$. Da Δ ein vollständiger Typ ist, ist dann nach Lemma 7.6 auch die Formel $\bigwedge_{k=1}^{n} (x_{i_k} \doteq x_{j_k})$ in Δ. Weiter ist die Formel

$$\bigwedge_{k=1}^{n} (x_{i_k} \doteq x_{j_k}) \to (R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \leftrightarrow R(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n}))$$

in der Logik $\mathcal{L}$ enthalten und da Δ ein $\mathcal{L}$–konsistenter vollständiger Typ ist, ist diese Formel auch in Δ. Nun folgt aber, da nach Lemma 7.6 vollständige Typen unter *modus ponens* abgeschlossen sind, daß das Bikonditional $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \leftrightarrow R(x_{j_1}, \ldots, x_{j_n})$ in Δ ist. Die Abgeschlossenheit von Δ unter Bikonditionalen (erneut eine Anwendung von Lemma 7.6) versichert uns nun der eingeforderten Repräsentantenunabhängigkeit. □

Definition 7.28 (Kanonische Interpretationsfunktion) *Sei Δ ein freier Henkin–Typ. Dann ist die Interpretationsfunktion $\mathcal{I}_\Delta$ für ein beliebiges n–stelliges Relationssymbol R aus $\mathbb{ML}$ definiert durch $\mathcal{I}_\Delta(R) := R^\Delta \subset \mathcal{U}^n$.*

Definition 7.29 (Kanonische Strukturen) *Für jeden freien Henkin–Typ Δ definieren wir die kanonische Struktur $\mathcal{S}_\Delta$ als das Tripel $\langle \mathcal{U}_\Delta, \mathcal{D}_\Delta, \mathcal{I}_\Delta \rangle$. Die Klasse aller kanonischen Strukturen $\{\mathcal{S}_\Delta \mid \Delta \in FHen_\mathcal{L}\}$ sei mit $\mathcal{W}_\mathcal{L}$ bezeichnet.*

Bemerkung 7.8 *Aufgrund der Bemerkung 7.7 und der Lemmata 7.13 und 7.14 ist die so definierte Struktur tatsächlich eine Struktur im Sinne der Semantik der freien Logik.*

Definition 7.30 (Kanonische Belegungen) *Sei Δ ein freier Henkin–Typ und sei $\mathcal{S}_\Delta$ die von Δ erzeugte freie Logik Struktur. Dann wird die kanonische*

Belegung $\upsilon_\Delta : Var \longrightarrow \mathcal{U}_\Delta$ *definiert, indem jeder Variablen* x_i *ihre Klasse* $[x_i]_\Delta$ *zugeordnet wird, das heißt, indem wir* $\upsilon_\Delta(x_i) := [x_i]_\Delta$ *festsetzen. Die Klasse aller kanonischen Belegungen, indiziert durch freie Henkin–Typen, sei mit* $\Upsilon_\mathfrak{L}$ *bezeichnet, also* $\Upsilon_\mathfrak{L} := \{\upsilon_\Delta \mid \Delta \in FHen_\mathfrak{L}\}$.

Notation 7.1 *Zur Vereinfachung der Notation werden wir folgendes festlegen: Ist z.B.* $\widetilde{\upsilon}_\Delta$ *eine* x*–Variante von* υ_Δ *derart, daß* $\widetilde{\upsilon}_\Delta(x) = \upsilon_\Delta(y) = [y]_\Delta$ *gilt, so schreiben wir für* $\widetilde{\upsilon}_\Delta$ *statt* $(\upsilon_\Delta)^{[y]_\Delta}_x$ *kurz* $\upsilon^{[y]_\Delta}_x$*, da hierdurch eindeutig festgelegt ist, auf welche Belegung und welchen Typ wir uns beziehen.*

Definition 7.31 (Kanonische freie Modelle) *Für jeden freien Henkin–Typ* Δ *ergibt sich nun ein Modell* $\mathcal{M}_\Delta := \langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon_\Delta \rangle$ *der freien Logik, indem wir die bisherigen Definitionen zusammentragen. Die Klasse aller kanonischen freien Modelle sei mit* $\mathfrak{K}_\mathfrak{L}$ *bezeichnet.*

Um ein modales Modell anzugeben verbleibt die Aufgabe, eine geeignete Klasse von CE–Relationen auszuzeichnen. Dies erfolgt in zwei Schritten. Zunächst wird eine allgemeine Klasse von Relationen — die pseudokanonischen Counterpart–Relationen — angegeben, deren Elemente die CE–Eigenschaft tragen. Diese Klasse wird schließlich auf geeignete Weise auf die Klasse der kanonischen Counterpart–Relationen eingeschränkt, welche Teil der kanonischen modalen Struktur sein werden.

Definition 7.32 (Pseudokanonische Counterpart–Relationen) *Sei eine beliebige treue Substitution* f *gegeben und seien* Δ *und* Γ *zwei freie Henkin Typen. Dann bezeichnen wir mit* C_f *die folgende Relation auf dem kartesischen Produkt von* $\mathcal{U}_\Delta$ *und* $\mathcal{U}_\Gamma$*, welche natürlich auch von* Δ *und* Γ *abhängt:*

$$C_f := \{\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \mid f(x) = y\}.$$

Solche Relationen nennen wir auch pseudokanonische Counterpart–Relationen. *Weiter bezeichnen wir mit* $\mathcal{C}^P_{\Delta,\Gamma}$ *die Menge aller solchen Relationen zwischen* $\mathcal{U}_\Delta$ *und* $\mathcal{U}_\Gamma$*, also*

$$\mathcal{C}^P_{\Delta,\Gamma} := \{C_f \subset \mathcal{U}_\Delta \times \mathcal{U}_\Gamma \mid f \in Treu\}$$

und schließlich mit $\mathcal{C}^P_\mathfrak{L}$ *die Menge aller pseudokanonischen Counterpart–Relationen zu irgend zwei freien Henkin–Typen* Δ *und* Γ.

Wir können zu einer gegebenen treuen Substitution f die Relation C_f auch alternativ definieren. Sei:

$$\langle [x]_\Delta, [y_\Gamma] \rangle \in \widetilde{C_f} :\Longleftrightarrow \textit{ es gibt ein } u \in [x_\Delta] \textit{ und ein } v \in [y]_\Gamma, \textit{ so daß } f(u) = v.$$

Ist $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$, so ist wegen $f(x) = y$ und $x \in [x]_\Delta$ sowie $y \in [y]_\Gamma$ offensichtlich $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in \widetilde{C_f}$. Ist umgekehrt $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in \widetilde{C_f}$, so existieren Variablen $u \in [x]_\Delta$ und $v \in [y]_\Gamma$, so daß $f(u) = v$, also $\langle [u]_\Delta, [v]_\Gamma \rangle \in C_f$. In diesem Fall gilt aber $[u]_\Delta = [x]_\Delta$ und $[v]_\Gamma = [y]_\Gamma$, mithin $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$. Demnach stimmen die Relationen C_f und $\widetilde{C_f}$ überein.

Diese Bemerkung ist gleichzeitig ein Beweis der Repräsentantenunabhängigkeit der so definierten Relation C_f auf $\mathcal{U}_\Delta \times \mathcal{U}_\Gamma$.

Lemma 7.15 *Pseudokanonische Counterpart–Relationen haben die CE–Eigenschaft. D.h. es gilt für je zwei freie Henkin–Typen* Δ *und* Γ*:* $\mathcal{C}^P_{\Delta,\Gamma} \subset \mathcal{C}_{\mathcal{S}_\Delta,\mathcal{S}_\Gamma}$*, wobei* $\mathcal{C}_{\mathcal{S}_\Delta,\mathcal{S}_\Gamma}$ *wieder die Menge* aller *CE–Relationen zwischen* $\mathcal{S}_\Delta$ *und* $\mathcal{S}_\Gamma$ *bezeichne.*

B e w e i s. Dies folgt unmittelbar aus der Bedingung, daß treue Variablensubstitutionen f total sind. Sind nämlich Δ und Γ gegeben und ist $[x]_\Delta$ irgendein Element aus $\mathcal{U}_\Delta$, so ist $f(x) = y$ für eine gewisse Variable y und daher $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$. Also ist C_f linkstotal. □

Lemma 7.16 *Pseudokanonische Counterpart–Relationen sind im allgemeinen weder funktional, noch injektiv oder rechtstotal. Darüber hinaus müssen sie nicht die Existenz–Eigenschaft erhalten.*

B e w e i s. Seien Δ und Γ freie Henkin–Typen mit $(x_i \doteq x_j) \in \Delta$ und $(x_i \doteq x_j) \notin \Gamma$ respektive. Solche freien Henkin–Typen existieren nach Lemma 7.12. Sei weiter $id : Var \longrightarrow Var$ die identische Variablensubstitution. Diese ist offenbar treu. Dann ist $[x_i]_\Delta = [x_j]_\Delta$, jedoch $[x_i]_\Gamma \neq [x_j]_\Gamma$. Darüber hinaus gilt aber $\langle [x_i]_\Delta, [x_i]_\Gamma \rangle \in C_{id}$ sowie $\langle [x_i]_\Delta, [x_j]_\Gamma \rangle \in C_{id}$. Also ist C_{id} nicht funktional.

Seien nun umgekehrt Δ und Γ freie Henkin–Typen, so daß $(x_i \doteq x_j) \notin \Delta$ und $(x_i \doteq x_j) \in \Gamma$. Dann folgt analog $[x_i]_\Delta \neq [x_j]_\Delta$, $[x_i]_\Gamma = [x_j]_\Gamma$ sowie $\langle [x_i]_\Delta, [x_i]_\Gamma \rangle \in C_{id}$ und $\langle [x_j]_\Delta, [x_i]_\Gamma \rangle \in C_{id}$. Also ist die Relation C_{id} nicht injektiv.

Um zu zeigen, daß pseudokanonische Counterpart–Relationen i. allg. nicht rechtstotal sind, haben wir zwei frei Henkin–Typen Δ und Γ und eine treue Substitution f anzugeben, so daß ein $[x]_\Gamma$ existiert, welches mit keinem $[y]_\Delta$ in der Relation C_f steht.

Sei dazu zunächst die Formelmenge Θ wie folgt definiert:

$$\Theta := \{x_0 \neq x_{2i+2} \mid i \in \omega\}.$$

Diese Formelmenge ist offenbar $\mathcal{L}$–konsistent. Sei dann ferner eine Variablensubstitution g definiert durch:

$$g(x_i) = \begin{cases} x_i & : \text{ falls } i = 0 \text{ oder } i = 2j+2 \text{ für } j \in \omega \\ x_{4j+1} & : \text{ falls } i = 2j+1 \text{ für } j \in \omega \end{cases}$$

Wie man leicht nachprüft ist g total und injektiv und somit treu. Weiter ist g auf $\{x_0\} \cup \{x_{2i+2} \mid i \in \omega\}$ die Identität und keine Variable der Form x_{4i+3} liegt im Bild von g. Folglich ist g eine großzügige Substitution, weshalb mit Korollar 7.1 die Existenz eines freien Henkin–Typs Γ folgt, so daß

$$\Theta^g = \Theta \subset \Gamma \in FHen_{\mathcal{L}}.$$

Sei nun Δ ein beliebiger weiterer freier Henkin–Typ, und sei eine treue Substitution f definiert durch $f(x_i) = x_{2i+2}$ für alle i. Wir behaupten, daß die Klasse $[x_0]_\Gamma$ zu keiner Klasse $[y]_\Delta$ in der Relation C_f steht. Nehmen wir einmal an, es gäbe eine solche Klasse $[y]_\Delta$. Dann existierten Variablen $u \in [y]_\Delta$ und $v \in [x_0]_\Gamma$, so daß $f(u) = v$ gilt. Das hieße aber, daß ein $i \in \omega$ existiert, so daß $v = x_{2i+2}$ ist und wegen $v \in [x_0]_\Gamma$ die Formel $x_0 = x_{2i+2}$ in Γ liegt. Da aber die Negation dieser Formel in Θ ist, hieße dies, daß Γ inkonsistent wäre. Also kann keine solche Klasse existieren und die Relation C_f auf $\mathcal{U}_\Delta \times \mathcal{U}_\Gamma$ ist nicht rechtstotal, was zu zeigen war.

Schließlich können wir ohne weiteres zwei freie Henkin–Typen Δ und Γ sowie eine Variablensubstitution f angeben, so daß $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$ gilt und $[x]_\Delta$ in Δ die Existenz–Eigenschaft hat während sie $[y]_\Gamma$ in Γ fehlt. Man betrachte dazu einfach die (konsistenten) Typen $\{E!(x)\}$ und $\{\neg E!(y)\}$. Diese lassen sich nach Lemma 7.12 zu freien Henkin Typen Δ und Γ erweitern, wobei die entsprechenden Variablensubstitutionen auf den Variablen in $E!(x)$ bzw. $E!(y)$ die Identität seien. Dann ist aber $E!(x) \in \Delta$, $E!(y) \notin \Gamma$, sowie $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$, wobei f so gewählt sei, daß $f(x) = y$. □

Es verbleibt die Aufgabe, eine Teilklasse $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ von Relationen aus $\mathcal{C}^P_\mathcal{L}$ auszusondern, welche Teil des kanonischen modalen Modells werden soll. Dies wird in Analogie zur Verfahrensweise bei der Konstruktion kanonischer Modelle in der modalen Aussagenlogik durchgeführt. Wir definieren zugleich die Klasse der kanonischen Counterpart–Relationen und den Begriff der kanonischen modalen Struktur:

Definition 7.33 (Kanonische modale Struktur) *Seien Δ und Γ zwei freie Henkin–Typen und f eine beliebige treue Substitution. Weiter sei der Ausdruck $(\Delta^\Box)^f$ wie folgt definiert:*

$$(\Delta^\Box)^f := \{\phi^f(z_1, \dots, z_n) \mid \Box\phi(y_1, \dots, y_n) \in \Delta \wedge f(y_i) = z_i, i = 1, \dots, n\}.$$

Wir definieren dann:

$$\mathcal{S}_\Delta \xrightarrow{C_f} \mathcal{S}_\Gamma :\Longleftrightarrow (\Delta^\Box)^f \subset \Gamma$$

und schreiben hierfür auch kurz $\Delta \xrightarrow{C_f} \Gamma$. Pseudokanonische Counterpart–Relationen, welche zusätzlich diese Bedingung erfüllen, nennen wir dann kanonische Counterpart–Relationen. *Diese konstituieren die Klasse $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ aller Counterpart–Relationen der kanonischen modalen Struktur . Mit anderen Worten, $\mathcal{C}_\mathcal{L}$ sei gegeben durch die Menge:*

$$\mathcal{C}_\mathcal{L} := \{C_f \mid f \in \mathit{Treu},\ \Delta \xrightarrow{C_f} \Gamma \text{ und } \Delta, \Gamma \in \mathit{FHen}_\mathcal{L}\}.$$

Die Menge $\mathfrak{Co}_{\Delta,\Gamma}$ der Counterpart–Relationen zwischen zwei möglichen Welten $\mathcal{S}_\Delta$ und $\mathcal{S}_\Gamma$ sei dann wieder durch $\mathcal{C}_\mathcal{L} \cap \mathcal{C}^P_{\Delta,\Gamma}$ gegeben. Schließlich sei unsere kanonische modale Struktur $\mathfrak{f}_\mathcal{L}$ *durch das Paar $\langle \mathcal{W}_\mathcal{L}, \mathcal{C}_\mathcal{L} \rangle$ definiert.*

Lemma 7.17 *Sei $\Delta \in FHen_{\mathfrak{L}}$ ein freier Henkin–Typ, so daß $\Diamond\phi \in \Delta$ für irgendeine Formel ϕ gilt. Dann folgt:*

(a) Die Formel $\neg\phi$ ist nicht $\mathfrak{L}$–beweisbar.

(b) Die Formelmengen $\Delta^{\Box} \cup \{\phi\}$ sowie $\Delta^{\Box}$ sind $\mathfrak{L}$–konsistent.

B e w e i s. Sei Δ ein freier Henkin–Typ mit $\Diamond\phi \in \Delta$ für eine Formel ϕ.

Zum Beweis von (a) sei angenommen, daß $\vdash_{\mathfrak{L}} \neg\phi$. Dann folgt mit *necessitation* $\vdash_{\mathfrak{L}} \Box\neg\phi$ und schließlich $\vdash_{\mathfrak{L}} \neg\Diamond\phi$. Demnach wäre $\neg\Diamond\phi \in \Delta$, also Δ inkonsistent, im Widerspruch zur Voraussetzung.

Zum Beweis von (b) sei angenommen, die Menge $\Delta^{\Box} \cup \{\phi\}$ wäre $\mathfrak{L}$–inkonsistent. Dann existierte nach dem Endlichkeitssatz 7.2 eine endliche Teilmenge $\Delta_0^{\Box} = \{\psi_1, \ldots, \psi_m\}$, so daß

$$\bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i \vdash_{\mathfrak{L}} \neg\phi.$$

Dann folgt nach dem Deduktionstheorem 7.3

$$\vdash_{\mathfrak{L}} \bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i \rightarrow \neg\phi.$$

Da $\mathfrak{L}$ eine normale Modallogik ist, folgt mit *necessitation*

$$\vdash_{\mathfrak{L}} \Box(\bigwedge_{i=1}^{m} \psi_i \rightarrow \neg\phi).$$

Da $\mathfrak{L}$ die Box–Distribution erlaubt, ergibt sich ferner:

$$\vdash_{\mathfrak{L}} \bigwedge_{i=1}^{m} \Box\psi_i \rightarrow \Box\neg\phi.$$

Nun ist aber nach Annahme $\Box\psi_i \in \Delta$ für $i = 1, \ldots, m$, also nach Lemma 7.6 auch $\bigwedge_{i=1}^{m} \Box\psi_i \in \Delta$. Nun folgt aber, wegen der Abgeschlossenheit von Δ unter modus ponens, daß $\Box\neg\phi \in \Delta$ gilt und damit auch $\neg\Diamond\phi \in \Delta$. Dann wäre Δ aber $\mathfrak{L}$–inkonsistent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also ist die obige Menge doch $\mathfrak{L}$–konsistent. Insbesondere ist dann die Menge $\Delta^{\Box}$ $\mathfrak{L}$–konsistent. $\Box$

Korollar 7.2 (Existenz möglicher Welten) *Sei $\mathfrak{f}_{\mathfrak{L}}$ die kanonische modale Struktur der Logik $\mathfrak{L}$ und sei $\mathcal{S}_{\Delta}$ eine mögliche Welt aus $\mathfrak{f}_{\mathfrak{L}}$. Ist dann $\Diamond\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$ für irgendeine Formel ϕ mit freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$, so existiert eine mögliche Welt $\mathcal{S}_{\Gamma}$ und eine kanonische Counterpart–Relation C_f in $\mathfrak{Co}_{\Delta,\Gamma}$ mit $\langle [x_i]_{\Delta}, [y_i]_{\Gamma} \rangle \in \mathcal{C}_f$ $(i = 1, \ldots, n)$, so daß $\phi^f(y_1, \ldots, y_n) \in \Gamma$ gilt. Insbesondere können C_f und Γ stets so gewählt werden, daß $f|_{Var(\phi)} = id$ ist, d.h. so, daß $\langle [x_i]_{\Delta}, [x_i]_{\Gamma} \rangle \in \mathcal{C}_f$ $(i = 1, \ldots, n)$ und $\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ gilt.*

B e w e i s. Nach Lemma 7.17 Teil (b) ist — da $\Diamond\phi \in \Delta$ — $\Delta^{\Box} \cup \{\phi\}$ $\mathfrak{L}$–konsistent. Nach Korollar 7.1 existiert dann zu jeder großzügigen Variablensubstitution f ein freier Henkin–Typ Γ mit $(\Delta^{\Box} \cup \{\phi\})^f \subseteq \Gamma$. Dann ist jedoch $(\Delta^{\Box})^f \subseteq \Gamma$, also die Relation C_f kanonisch und die Formel ϕ^f in Γ. Insbesondere kann stets ein großzügiges $f \in \mathit{Treu}$ gewählt werden, so daß $f|_{Var(\phi)} = id$ ist, da lediglich endlich viele Variablen festgehalten werden müssen. □

Lemma 7.18 *Kanonische Counterpart–Relationen sind im allgemeinen weder funktional noch injektiv. Darüber hinaus müssen sie nicht die Existenz–Eigenschaft erhalten.*

B e w e i s. Wir variieren die Konstruktionen aus Lemma 7.16.
(i) Sei $\Delta \in \mathit{FHen}$ derart, daß $(x_i \doteq x_j) \in \Delta$ sowie $\Diamond(x_i \not\doteq x_j) \in \Delta$. Solch ein freier Henkin–Typ existiert, solange die Formel $(x_i \doteq y_j) \to \Box(x_i \doteq x_j)$ nicht zu $\mathfrak{L}$ gehört. Nach Lemma 7.2 existiert dann ein freier Henkin–Typ Γ und eine kanonische Counterpart–Relation C_f mit $f|_{\{x_i,x_j\}} = id$, so daß $(x_i \not\doteq x_j) \in \Gamma$ gilt. Wie in Lemma 7.16 folgt dann, daß C_f nicht funktional ist.
(ii) Zum Nachweis der Existenz einer kanonischen Counterpart–Relation, welche nicht injektiv ist, gehe man wie in (i) vor, starte jedoch mit einem freien Henkin–Typ Δ, welcher die Formeln $(x_i \not\doteq x_j)$ und $\Diamond(x_i = x_j)$ enthält. Dies ist möglich, solange die Logik $\mathfrak{L}$ nicht das Schema $(x \not\doteq y) \to \Box(x \not\doteq y)$ enthält (Notwendigkeit der Differenz).
(iii) Sei die Formel $E!(x) \to \Box E!(x)$ nicht in $\mathfrak{L}$. Dann existiert ein freier Henkin–Typ Δ, so daß $E!(x) \in \Delta$ (x hat die Existenz–Eigenschaft in Δ) und $\Diamond\neg E!(x) \in \Delta$ ist. Dann folgt mit Lemma 7.2 offenbar die Existenz eines erreichbaren freien Henkin–Typs Γ, so daß x in Γ *nicht* die Existenz–Eigenschaft hat. Offenbar können wir auf dieselbe Weise nachweisen, daß — falls die Logik $\mathfrak{L}$ die Formel $\neg E!(x) \to \Box\neg E!(x)$ nicht enthält — freie Henkin–Typen Δ und Γ und eine kanonische Counterpart–Relation C_f existieren, so daß eine Variable x in Δ *nicht* die Existenz–Eigenschaft hat, während sie eine Variable y mit $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$ in Γ hat. □

Definition 7.34 (Kanonisches modales Modell) *Das kanonische modale Modell $\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}$ ist nun gegeben als das Paar $\langle \mathfrak{f}_{\mathfrak{L}}, \Upsilon_{\mathfrak{L}} \rangle$, bestehend aus der kanonischen modalen Struktur und der Klasse aller kanonischen Belegungen indiziert durch freie Henkin–Typen. Dabei wird $\Upsilon_{\mathfrak{L}}$ als Abbildung $\mathcal{W}_{\mathfrak{L}} \times Var \longrightarrow \mathfrak{Du}_{\mathfrak{L}}$ mit $\Upsilon_{\mathfrak{L}}(\mathcal{S}_\Delta, x) = [x]_\Delta$ aufgefasst.*

Das folgende Lemma, das — wie sein Name schon verrät — grundlegend ist, erlaubt nun, die Elementbeziehung zwischen Formeln und freien Henkin–Typen mit der Gültigkeitsbeziehung zwischen Formeln und den induzierten freien Strukturen des kanonischen Modells zu vertauschen. Für den Beweis dieses Sachverhalts ist — neben der geeigneten Definition der kanonischen Counterpart–Relationen, welche den $\Box$–Fall reglementiert — offenbar eine Anwendung des Lemmas 7.2 über die Existenz möglicher Welten unerläßlich.

Lemma 7.19 (Fundamentallemma) *Sei $\mathfrak{L}$ eine beliebige modale Prädikatenlogik, ϕ eine beliebige modale Formel, $\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}$ das kanonische modale Modell,*

$\mathcal{S}_\Delta$ *eine beliebige mögliche Welt und* v_Δ *die zugehörige kanonische Belegung. Dann gilt:*

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, v_\Delta \rangle \models \phi \Longleftrightarrow \phi \in \Delta.$$

B e w e i s. Wir beweisen die Behauptung induktiv über den Formelaufbau. Sei im folgenden Δ irgendein freier Henkin–Typ:

(i) Sei $\phi(x_i, x_j) = (x_i \doteq x_j)$. Dann gilt

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, v_\Delta \rangle \models (x_i \doteq x_j)$$

per definitionem genau dann, wenn $v_\Delta(x_i) = v_\Delta(x_j)$ gilt. Dies bedeutet aber die Klassengleichheit $[x_i]_\Delta = [x_j]_\Delta$, die genau dann gegeben ist, wenn die Formel $(x_i \doteq x_j) \in \Delta$ ist.

(ii) Sei $\phi(x_1, \ldots, x_m) = R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$, wobei R ein n–stelliges Relationssymbol bezeichne und $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}\} \subset \{x_1, \ldots, x_m\}$. Dann gilt per definitionem

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, v_\Delta \rangle \models R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n})$$

genau dann, wenn $\langle [x_{i_1}]_\Delta, \ldots, [x_{i_n}]_\Delta \rangle \in R^\Delta$ ist. Dies ist aber wiederum nach der Definition von R^Δ genau dann der Fall, wenn $R(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}) \in \Delta$ ist.

(iii) Sei nun $\phi = \neg\psi$, und für ψ gelte die Behauptung. Es gilt

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, v_\Delta \rangle \models \neg\psi$$

genau dann, wenn

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, v_\Delta \rangle \not\models \psi.$$

Dies ist nach Induktionsvoraussetzung genau dann der Fall, wenn $\psi \notin \Delta$ gilt. Da Δ aber ein vollständiger Typ ist, ist dies nach Lemma 7.6 äquivalent zu $\neg\psi \in \Delta$.

(iv) Sei $\phi = (\psi \wedge \chi)$ und für ψ und χ gelte die Induktionsbehauptung. Dieser Fall verläuft völlig analog zu Fall (iii). Hier nutzt man die Eigenschaft vollständiger Typen, daß $(\psi \wedge \chi) \in \Delta$ genau dann gilt, wenn $\psi \in \Delta$ und $\chi \in \Delta$.

(v) Sei $\phi = \exists x \psi(x, \bar{y})$ und für ψ gelte die Induktionsbehauptung. Man beachte, daß ψ eventuell (neben x) weitere freie Variablen enthalten kann. Darüber hinaus können in ψ bereits Quantoren, daß heißt gebundene Variablen vorkommen. Es gilt nun:

$$\mathcal{M}_\Delta \models \exists x \psi(x, \bar{y}) :\Longleftrightarrow \textit{ es eine exist. } x\textit{–variante } \widetilde{v_\Delta} \textit{ gibt mit } \langle \mathcal{S}_\Delta, \widetilde{v_\Delta} \rangle \models \psi(x, \bar{y}).$$

Dies ist aber nach Definition genau dann der Fall, wenn eine Belegung $\widetilde{v_\Delta}$ mit $\widetilde{v_\Delta}(x) = [z]_\Delta \in \mathcal{D}_\Delta$ existiert, so daß

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, v_x^{[z]_\Delta} \rangle \models \psi(x, \bar{y}).$$

Nun stimmen die Belegungen v_Δ und $v_x^{[z]_\Delta}$ in allen Variablen außer eventuell in x überein und es gilt $v_\Delta(z) = [z]_\Delta = v_x^{[z]_\Delta}(x)$. Sei nun $\widetilde{\psi}(x, \bar{y})$ eine gebundene

Umbenennung von $\psi(x, \bar{y})$, so daß z frei für x in $\widetilde{\psi}(x, \bar{y})$ ist. Ist hier ψ quantorenfrei, so können wir selbstverständlich $\widetilde{\psi} = \psi$ wählen. Nun können wir unter Benutzung des Koinzidenzlemmas 7.3 die Variablen x und z zusammen mit den Belegungen vertauschen. Genauer folgt:

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon_\Delta \rangle \vDash \widetilde{\psi}(z, \bar{y}) \textit{ und } [z]_\Delta \in \mathcal{D}_\Delta$$

Dies ist jedoch nach Induktionsvoraussetzung und Definition gleichbedeutend mit der Forderung nach der Existenz einer Variablen z, so daß $E!(z) \in \Delta$ und $\widetilde{\psi}(z, \bar{y}) \in \Delta$. Da $E!(z) \wedge \widetilde{\psi}(z, \bar{y}) \to \exists z \widetilde{\psi}(z, \bar{y}) \in \mathcal{L}$ ist (als tautologische Umformung einer Instanz von (E! 2)), folgt hieraus, da Δ ein vollständiger Typ ist, daß $\exists z \widetilde{\psi}(z, \bar{y}) \in \Delta$ gilt. Schließlich folgt mit Lemma 7.11, daß dann auch $\exists x \psi(x, \bar{y})$ in Δ liegt.
Nehmen wir umgekehrt an, daß $\exists x \psi(x, \bar{y}) \in \Delta$ gilt, so folgt, da Δ ein freier Henkin–Typ ist, die Existenz einer Variablen z mit $E!(z) \in \Delta$ sowie $\psi(z, \bar{y}) \in \Delta$. Nun können wir wie oben — jedoch in umgekehrter Reihenfolge — schließen. Damit ist Fall (v) bewiesen.

(vi) Sei, die Induktion abschließend, $\phi(x_1, \ldots, x_n) = \Diamond \psi(x_1, \ldots, x_n)$ und ψ erfülle die Induktionsbehauptung. Nach Definition gilt:

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon_\Delta \rangle \vDash \Diamond \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

genau dann, wenn eine treue Substitution f und ein freier Henkin–Typ Γ existieren, so daß $\Delta \xrightarrow{C_f} \Gamma \in \mathfrak{Co}_{\Delta,\Gamma}$ und es eine $\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$–Variante $\widetilde{\upsilon_\Gamma}$ gibt, so daß für $i = 1, \ldots, n$ $\langle \upsilon(x_i), \widetilde{\upsilon_\Gamma}(x_i) \rangle \in C_f$ gilt, sowie

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \widetilde{\upsilon_\Gamma} \rangle \vDash \psi(x_1, \ldots, x_n).$$

Wir nehmen zunächst an, daß

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon_\Delta \rangle \vDash \Diamond \psi(x_1, \ldots, x_n).$$

Setzen wir die relevanten Definitionen ein, so folgt zunächst, daß ein freier Henkin–Typ Γ und ein $C_f \in \mathfrak{Co}_{\Delta,\Gamma}$ existieren, so daß $(\Delta^\Box)^f \subset \Gamma$. Weiter gibt es dann Variablen $y_1, \ldots, y_n$, so daß $\langle [x_i]_\Delta, [y_i]_\Gamma \rangle \in C_f$ gilt und

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \upsilon^{[y_i]_\Gamma}_{x_i} \rangle \vDash \psi(x_1, \ldots, x_n).$$

Dann existieren aber Variablen $u_i \in [x_i]_\Delta$ und $v_i \in [y_i]_\Gamma$ mit $f(u_i) = v_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Dann ist insbesondere $[u_i]_\Delta = [x_i]_\Delta$ und $[v_i]_\Gamma = [y_i]_\Gamma$ und daher auch $\langle [u_i], [v_i] \rangle \in C_f$ für $i = 1, \ldots, n$. Es gilt somit:

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \upsilon^{[v_i]_\Gamma}_{x_i} \rangle \vDash \psi(x_1, \ldots, x_n).$$

In der Formel $\psi(x_1, \ldots, x_n)$ sind eventuell die Variablen v_i nicht frei für x_i, d.h. können in den Wirkungsbereich eines Quantors der Form $\exists v_i \ldots$ geraten. Sei daher g eine treue Substitution mit $g(x_i) = v_i$ und beliebig sonst. Dann gilt nach dem Übergangslemma 7.8

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \upsilon^{[v_i]_\Gamma}_{x_i} \circ g^{-1} \rangle \vDash \psi^g(v_1, \ldots, v_n),$$

was nach dem Koinzidenzlemma gleichbedeutend ist mit

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \upsilon_\Gamma \rangle \models \psi^g(v_1, \ldots, v_n).$$

Nach Induktionsvoraussetzung folgt nun:

$$\psi^g(v_1, \ldots, v_n) \in \Gamma \qquad (*)$$

Sei nun angenommen, daß $\Diamond\psi(x_1, \ldots, x_n) \notin \Delta$. Da $[x_i]_\Delta = [u_i]_\Delta$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt, folgt zunächst, daß $(x_i \doteq u_i) \in \Delta$ für $i = 1, \ldots, n$ gilt. Sei dann $h \in \mathit{Treu}$ eine Variablensubstitution mit $h(x_i) = u_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Lemma 7.11 gilt dann aber

$$\Diamond\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta \Longleftrightarrow \Diamond\psi^h(u_1, \ldots, u_n) \in \Delta,$$

weshalb nach Annahme dann auch $\Diamond\psi^h(u_1, \ldots, u_n) \notin \Delta$ gilt. Dann folgt, da Δ ein vollständiger Typ ist, daß $\Box\neg\psi^h(u_1, \ldots, u_n) \in \Delta$ ist. Dann ist aber wegen $(\Delta^\Box)^f \subset \Gamma$ auch $(\neg\psi^h)^f(f(u_1), \ldots, f(u_n)) \in \Gamma$, d.h.

$$\neg\psi^{f\circ h}(v_1, \ldots, v_n) \in \Gamma \qquad (**).$$

Da sich nun die Formeln $(*)$ und $(**)$ lediglich in der Wahl der gebundenen Variablen unterscheiden, gilt:

$$\psi^g(v_1, \ldots, v_n) \leftrightarrow \psi^{f\circ h}(v_1, \ldots, v_n) \in \mathfrak{L}.$$

Dann folgt aber aus $(*)$ und Lemma 7.6, daß $\psi^{f\circ h}(v_1, \ldots, v_n) \in \Gamma$ ist. Dann wäre wegen $(**)$ der Typ Γ aber inkonsistent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Also war die Annahme falsch, d.h. es ist $\Diamond\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$, was zu zeigen war.

Sei nun umgekehrt vorausgesetzt, daß $\Diamond\psi(x_1, \ldots, x_n) \in \Delta$ gilt. Dann existiert nach Korollar 7.2 eine mögliche Welt Γ und eine kanonische Counterpart–Relation C_f in $\mathfrak{Co}_{\Delta,\Gamma}$, so daß $\psi^f(y_1, \ldots, y_n) \in \Gamma$ gilt. Dann ist also $(\Delta^\Box)^f \subset \Gamma$, wobei $f(x_i) = y_i$ für $i = 1, \ldots, n$. Also gilt $\Delta \xrightarrow{C_f} \Gamma$ und $\langle [x_i]_\Delta, [y_i]_\Gamma \rangle \in \mathcal{C}_f$ für $i = 1, \ldots, n$. Nach Induktionsvoraussetzung gilt nun

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \upsilon_\Gamma \rangle \models \psi^f(y_1, \ldots, y_n)$$

und nach dem Übergangslemma demnach auch

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \upsilon_\Gamma \circ f \rangle \models \psi(x_1, \ldots, x_n).$$

D.h. aber es existiert eine $\langle x_1, .., x_n \rangle$–Variante $\widetilde{\upsilon_\Gamma}$ von υ_Γ, nämlich $\widetilde{\upsilon_\Gamma}(x_i) = [f(x_i)]_\Gamma = [y_i]_\Gamma$, so daß nach dem Koinzidenzlemma

$$\langle \mathcal{S}_\Gamma, \widetilde{\upsilon_\Gamma} \rangle \models \psi(x_1, \ldots, x_n)$$

und $\langle \upsilon_\Delta(x_i), \widetilde{\upsilon_\Gamma}(x_i) \rangle \in C_f$, sowie $(\Delta^\Box)^f \subset \Gamma$. Dies ist aber gerade die Bedingung dafür, daß

$$\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon_\Delta \rangle \models \Diamond\psi(x_1, \ldots, x_n)$$

gilt. Damit ist der Beweis des Fundamentallemmas abgeschlossen. $\Box$

Satz 7.6 (Kanonische Modelle) *Sei $\mathfrak{L}$ eine beliebige modale Prädikatenlogik im Sinne von Definition 7.14. Dann wird $\mathfrak{L}$ vollständig durch das kanonische modale Modell beschrieben. D.h. es gilt: $Th(\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}) = \mathfrak{L}$. Insbesondere ist die Gültigkeit von Formeln aus $\mathfrak{L}$ im kanonischen Modell unabhängig von der kanonischen Belegung, d.h. es gilt $\mathfrak{f}_{\mathfrak{L}} \models \mathfrak{L}$. Also gilt sogar $\mathfrak{L} = Th(\mathfrak{f}_{\mathfrak{L}})$.*

B e w e i s. Sei zunächst angenommen, daß $\phi(\bar{x}) \in \mathfrak{L}$ gilt. Dann folgt mit Lemma 7.6, daß $\phi \in \Delta$ für alle freien Henkin–Typen Δ. Das Fundamentallemma liefert nun: $\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon_\Delta \rangle \models \phi$ für alle freien Henkin–Typen Δ, also $\phi \in Th(\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}})$.

Sei nun $\phi(x_1, \ldots, x_n) \notin \mathfrak{L}$ eine Formel, deren freie Variablen unter $x_1, \ldots, x_n$ vorkommen (n kann auch 0 sein). Dann ist die Menge $\{\neg\phi(x_1, \ldots, x_n)\}$ ein $\mathfrak{L}$–konsistenter n–Typ. Nach Lemma 7.12 existiert dann eine treue Substitution f, welche auf allen Variablen die in ϕ auftauchen (auch gebundenen) die Identität ist, und ein freier Henkin–Typ Γ, so daß $\{\neg\phi(x_1, \ldots, x_n)\}^f \subset \Gamma$. Dann ist aber $\neg\phi(x_1, \ldots, x_n) \in \Gamma$ und da Γ insbesondere ein vollständiger Typ ist, $\phi(x_1, \ldots, x_n) \notin \Gamma$ nach Lemma 7.6. Nach dem Fundamentallemma gilt dann aber $\langle \mathcal{S}_\Gamma, \upsilon_\Gamma \rangle \not\models \phi(x_1, \ldots, x_n)$, weshalb $\phi(x_1, \ldots, x_n) \notin Th(\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}})$ gilt.

Sei — zum Beweis der Zusatzbehauptung — angenommen, daß $\mathfrak{f}_{\mathfrak{L}} \not\models \phi(\bar{x})$ für eine Formel $\phi(\bar{x})$ aus $\mathfrak{L}$. Dann existiert eine Variablenbelegung Υ in $\mathfrak{f}$, so daß $\langle \mathfrak{f}_{\mathfrak{L}}, \Upsilon \rangle \not\models \phi(\bar{x})$. Also gilt für eine mögliche Welt $\mathcal{S}_\Delta$ aus der kanonischen modalen Struktur $\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon \rangle \not\models \phi(\bar{x})$. Sei $\upsilon(x_i) = [y_i]_\Delta$. Sei weiter $\widetilde{\phi}(\bar{x}) \in \mathfrak{L}$ eine gebundene Umbenennung von $\phi(\bar{x})$, so daß y_i frei für x_i in $\widetilde{\phi}(\bar{x})$ ist. Nach Anwendung einer erststufigen Substitution (ersetze x_i durch y_i) erhalten wir $\widetilde{\phi}(\bar{y}) \in \mathfrak{L}$. Nach dem Fundamentallemma gilt also $\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon_\Delta \rangle \models \widetilde{\phi}(\bar{y})$. Da aber $\upsilon(x_i) = \upsilon_\Delta(y_i)$ für $i = 1, \ldots, n$ ist, müsste nach dem Koinzidenzlemma 7.3 und dem Lemma über gebundene Umbenennungen 7.4 auch $\langle \mathcal{S}_\Delta, \upsilon \rangle \models \phi(\bar{x})$ gelten, im Widerspruch zur Annahme. Dies schließt den Beweis ab. □

7.5 Definierbare Klassen von modalen Strukturen

7.5.1 Framevollständigkeit und Kanonizität

Definition 7.35 (Frame–Vollständigkeit) *Wir sagen, daß eine modale Prädikatenlogik $\mathfrak{L}$* Frame–vollständig *ist, falls eine Klasse $\mathfrak{FrK}(\mathfrak{L})$ von modalen Frames existiert, so daß*

$$\mathfrak{L} = \bigcap_{\mathfrak{F} \in \mathfrak{FrK}(\mathfrak{L})} Th(\mathfrak{F}).$$

Definition 7.36 (Kanonizität) *Sei $\mathfrak{L}$ eine modale Prädikatenlogik und $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ das kanonische Frame. Gilt dann $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} \models \mathfrak{L}$, so heißt $\mathfrak{L}$* kanonisch.

Satz 7.7 *Jede kanonische Logik ist Frame–vollständig.*

B e w e i s. Sei $\mathfrak{L}$ eine kanonische modale Prädikatenlogik und $\mathfrak{FrK}(\mathfrak{L})$ die Klasse aller Frames, so daß $\mathfrak{F} \models \mathfrak{L}$. Da $\mathfrak{L}$ kanonisch ist, ist diese Klasse nicht leer, d.h. es gilt $\mathfrak{L} \subseteq \bigcap_{\mathfrak{F} \in \mathfrak{FrK}(\mathfrak{L})} Th(\mathfrak{F})$. Da nach Satz 7.6 jedoch $Th(\mathfrak{M}_{\mathfrak{L}}) = \mathfrak{L}$ ist, gilt die Gleichheit. □

Korollar 7.3 *Die Logik* **FK** *ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse* $\mathfrak{FrK}$ *aller modalen Frames.*

B e w e i s. Sei $\mathfrak{F}$ ein beliebiges modales Frame. Nach Satz 7.3 gilt $\mathfrak{F} \models$ **FK**. Ist andererseits $\phi \notin$ **FK**, so gilt nach Satz 7.6, daß $\phi \notin Th(\mathfrak{M}_{FK})$, also $\mathfrak{F}_{FK} \not\models \phi$, d.h. $\phi \notin Th(\mathfrak{FrK})$. □

7.5.2 Fallstudien

Wir behandeln im folgenden noch einige spezielle Schemata, welche von besonderer Bedeutung sind und zeigen Frame–Vollständigkeitsresultate bezüglich geeigneter Klassen von modalen Frames. Dabei ist die allgemeine Beweisstrategie wie folgt: Ist **E** eine Eigenschaft von modalen Frames, d.h. eine Bedingung an die Familie von Counterpart–Relationen des Frames (von Interpretationen wird also abstrahiert), so zeigt man, daß zu einer gegebenen Logik $\mathfrak{L}$ für alle Frames $\mathfrak{F}$ mit Eigenschaft **E**, $\mathfrak{F} \models \mathfrak{L}$ gilt. Kann man dann zeigen, daß das kanonische Frame der Logik $\mathfrak{L}$ die Eigenschaft **E** hat, so ist $\mathfrak{L}$ kanonisch und Frame–vollständig bezüglich der Klasse aller Frames mit Eigenschaft **E**.

Definition 7.37 (Prominente Schemata) *Seien im folgenden x und y beliebige Variablen und* ϕ *eine beliebige modale Formel:*

(NdI)	$(x \doteq y) \to \Box(x \doteq y)$	*(Notwendigkeit der Identität)*
(NdD)	$(x \not\doteq y) \to \Box(x \not\doteq y)$	*(Notwendigkeit der Differenz)*
(NdE)	$E!(x) \to \Box E!(x)$	*(Notwendigkeit der Existenz)*
(NdF)	$\neg E!(x) \to \Box\neg E!(x)$	*(Notwendigkeit der Fiktionalität)*
(BF)	$\forall x\Box\phi \to \Box\forall x\phi$	*(Barcan–Formeln)*
(CBF)	$\Box\forall x\phi \to \forall x\Box\phi$	*(Konverse Barcan–Formeln)*
(T)	$\Box\phi \to \phi$	*(T–Schema)*
(4)	$\Box\phi \to \Box\Box\phi$	*(4–Schema)*
(B)	$\phi \to \Box\Diamond\phi$	*(B–Schema)*

Bemerkung 7.9 *Offenbar sind die Formeln (NdE) und* $\forall x\Box E!(x)$ *axiomatisch gleichwertig. Denn einerseits ist* $\forall x\Box E!(x) \to (E!(x) \to \Box E!(x))$ *eine Instanz von (E! 2) und somit* **FK** $+ \forall x\Box E!(x) \vdash (NdE)$. *Umgekehrt gilt* **FK** $+ (NdE) \vdash \forall x\Box E!(x)$ *nach Anwendung von universeller Quantifikation, universeller Distribution, (E! 1) und (mp). Es gilt jedoch* **FK** $\not\vdash \forall x\Box E!(x) \leftrightarrow (E!(x) \to \Box E!(x))$, *wie man sich auch leicht semantisch klar machen kann. Betrachte dazu eine mögliche Welt* $\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}}\rangle$ *in einem modalen Modell* $\mathfrak{M}$, *so daß* $v(x) \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}}$ *ist und* $\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}}\rangle \models \Box E!(x)$. *Dann ist es aber durchaus möglich, daß eine existentielle x–Variante* $\widetilde{v_{\mathcal{S}}}$ *existiert, so daß* $\langle \mathcal{S}, \widetilde{v_{\mathcal{S}}}\rangle \models \neg\Box E!(x)$ *gilt, also* $\langle \mathcal{S}, v_{\mathcal{S}}\rangle \models (E!(x) \to \Box E!(x)) \wedge \exists x\neg\Box E!(x)$.

Die Schemata (BF) und (CBF) hängen eng mit den einzelnen Formeln (NdF) und (NdE) zusammen. Wir behandeln exemplarisch die Zusammenhänge zwischen (NdE) und (CBF). Für (BF) und (NdF) findet man ähnliche Resultate.

Lemma 7.20 *Es bestehen folgende Ableitbarkeitsbeziehungen zwischen (NdE) und (CBF):*

(i) $\mathbf{FK} + (NdE) \vdash (CBF)$,
(ii) $\mathbf{FK} + (CBF) \vdash (NdE)$,
(iii) $\mathbf{FK} \vdash \forall x \Box E!(x) \leftrightarrow (CBF)$,
(iv) $\mathbf{FK} \nvdash (NdE) \rightarrow (CBF)$.

B e w e i s. (ii) folgt sofort aus (iii) und (i) folgt aus (iii) unter Beachtung der letzten Bemerkung. Zum Beweis von (iii) sei ϕ eine beliebige Formel.

$\mathbf{FK} \vdash \forall x\phi \rightarrow (E!(x) \rightarrow \phi)$	(Instanz von (E! 2))	(1)
$\mathbf{FK} \vdash \Box\forall x\phi \rightarrow (\Box E!(x) \rightarrow \Box\phi)$	(Aus (1) mit (Nec) + (Norm.))	(2)
$\mathbf{FK}, \Box\forall x\phi \vdash \Box E!(x) \rightarrow \Box\phi$	(Aus (2) mit Deduktionstheorem)	(3)
$\mathbf{FK}, \Box\forall x\phi \vdash \forall x\Box E!(x) \rightarrow \forall x\Box\phi$	(Univ. Quantifikation, $x \notin FV(\Box\forall x\phi)$)	(4)
$\mathbf{FK}, \Box\forall x\phi, \forall x\Box E!(x) \vdash \forall x\Box\phi$	(Deduktionstheorem aus (4))	(5)
$\mathbf{FK} \vdash \forall x\Box E!(x) \rightarrow (\Box\forall x\phi \rightarrow \forall x\Box\phi)$	(2 × Deduktionstheorem aus (5))	(6)

Die umgekehrte Implikation ergibt sich sofort aus der Tatsache, daß $\Box\forall x E!(x) \rightarrow \forall x\Box E!(x)$ eine Instanz von (CBF) ist und $\Box\forall x E!(x)$ zur Logik gehört.

(iv) kann man leicht einsehen, indem man Korollar 7.3 ausnutzt und semantisch argumentiert. Dazu ist ein Modell $\mathfrak{M}$ und eine mögliche Welt $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle$ in $\mathfrak{M}$ anzugeben, so daß

$$\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models E!(x) \wedge \Box E!(x) \wedge \Box\forall x\phi$$

und für eine existentielle x–Variante $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}}$

$$\langle \mathcal{S}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{S}}} \rangle \models \Diamond(\neg\phi \wedge \neg E!(x)).$$

Dies ist aber ohne weiteres möglich. □

Definition 7.38 (Funktionale Frames) *Ein modales Frame* $\mathfrak{F}$ *heißt* funktional *oder auch* spaltungsfrei *genau dann, wenn alle* $C \in \mathcal{C}_{\mathfrak{F}}$ *funktional sind.*

Lemma 7.21 *Ist* $\mathfrak{F}$ *funktional, so gilt* $\mathfrak{F} \models (NdI)$.

B e w e i s. Sei Υ eine beliebige Belegung in $\mathfrak{F}$, $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretationsfunktion in das modale Frame und $\mathfrak{f}$ die entsprechende modale Struktur. Angenommen $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models (x_1 \doteq x_2)$. Dann gilt $\upsilon_{\mathcal{S}}(x_1) = \upsilon_{\mathcal{S}}(x_2)$. Sei $\mathcal{T}$ eine beliebige mögliche Welt in $\mathfrak{f}$, so daß $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ gilt und $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(x_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x_i) \rangle \in C$ für $i = 1, 2$ und eine geeignete x_1, x_2–Variante $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$. Da C nach Voraussetzung funktional ist, folgt $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x_1) = \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x_2)$, also $\langle \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}} \rangle \models (x_1 \doteq x_2)$. Da C beliebig war, folgt $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \models (x_1 \doteq x_2) \rightarrow \Box(x_1 \doteq x_2)$. D.h. aber, da $\mathcal{I}$ und Υ beliebig waren, $\mathfrak{F} \models (x \doteq y) \rightarrow \Box(x \doteq y)$ für beliebige Variablen x und y, was zu zeigen war. □

Satz 7.8 (Kanonizität von (NdI)) *Das kanonische Frame der Logik* $\mathcal{L} = \mathbf{FK} + (NdI)$ *ist funktional, d.h. es gilt* $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}} \models (NdI)$.

B e w e i s. Sei $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretationsfunktion, seien $\mathcal{S}_\Delta$ und $\mathcal{S}_\Gamma$ beliebige Welten und gelte $(\Delta^\Box)^f \subseteq \Gamma$, d.h. $\Delta \xrightarrow{C_f} \Gamma$. Sei ferner angenommen, daß $[x_1]_\Delta = [x_2]_\Delta$ und daß $\langle [x_i]_\Delta, [y_i]_\Gamma \rangle \in C_f$ für $i = 1, 2$. Es folgt $(x_1 \doteq x_2) \in \Delta$ und wegen $(x_1 \doteq x_2) \rightarrow \Box(x_1 \doteq x_2) \in \mathfrak{L} \subset \Delta$ auch $\Box(x_1 \doteq x_2) \in \Delta$. Dann ist aber $(f(x_1) \doteq f(x_2)) \in \Gamma$. Nach Definition ist aber $f(x_1) \in [y_1]_\Gamma$ und $f(x_2) \in [y_2]_\Gamma$. Es folgt $[y_1]_\Gamma = [y_2]_\Gamma$, womit gezeigt ist, daß C_f funktional ist. □

Korollar 7.4 *Die Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdI)$ ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller funktionalen Frames.*

Definition 7.39 (Fusionsfreie Frames) *Ein modales Frame $\mathfrak{F}$ heißt* fusionsfrei *oder auch* injektiv *genau dann, wenn alle $C \in \mathcal{C}_\mathfrak{F}$ injektiv sind. D.h. ist $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{a}_2$ und $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \rangle \in C$ für $i = 1, 2$, so gilt $\mathbf{b}_1 \neq \mathbf{b}_2$.*

Völlig analog beweist man für das Schema (NdD) die folgenden Ergebnisse:

Lemma 7.22 *Ist $\mathfrak{F}$ fusionsfrei, so gilt $\mathfrak{F} \vDash (NdD)$.*

B e w e i s. Analog zu Lemma 7.21. □

Satz 7.9 (Kanonizität von (NdD)) *Das kanonische Frame der Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdD)$ ist fusionsfrei, d.h. es gilt $\mathfrak{F}_\mathfrak{L} \vDash (NdD)$.*

B e w e i s. Analog zum Satz 7.8. □

Korollar 7.5 *Die Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdD)$ ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller fusionsfreien Frames.*

Definition 7.40 (Existenztreue, –freundlichkeit und Fiktionaltreue)
(a) Ein modales Frame $\mathfrak{F}$ heißt existenztreu *genau dann, wenn für alle Welten $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ und alle $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ gilt: Ist $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$ und $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in C$, so gilt $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_\mathcal{T}$. Wir schreiben kurz: $\mathcal{C}(\mathcal{D}_\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{D}_\mathcal{T}$.*
(b) $\mathfrak{F}$ heißt existenzfreundlich *genau dann, wenn für alle Welten $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ mit $\mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}} \neq \emptyset$ gilt: Ist $\mathbf{b} \in \mathcal{D}_\mathcal{T}$, so existiert ein $\mathbf{a} \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$ und ein $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$, so daß $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in C$. Kurz: $\mathcal{C}(\mathcal{D}_\mathcal{S}) \supseteq \mathcal{D}_\mathcal{T}$.*
(c) Gilt hingegen für alle möglichen Welten $\mathcal{S}$ und $\mathcal{T}$ in $\mathfrak{F}$: $\mathcal{C}(\mathcal{U}_\mathcal{S} \setminus \mathcal{D}_\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{U}_\mathcal{T} \setminus \mathcal{D}_\mathcal{T}$, so heißt $\mathfrak{F}$ fiktionaltreu.

Lemma 7.23 *Ist $\mathfrak{F}$ existenztreu, so gilt $\mathfrak{F} \vDash (NdE)$.*

B e w e i s. Sei Υ eine beliebige Belegung in $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{I}$ eine beliebige Interpretationsfunktion und sei angenommen, daß $\langle \mathcal{S}, \upsilon_\mathcal{S} \rangle \vDash E!(x)$ für eine mögliche Welt $\mathcal{S}$. Dann gilt zunächst $\upsilon_\mathcal{S}(x) \in \mathcal{D}_\mathcal{S}$. Gilt zudem $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ und ist $\langle \upsilon_\mathcal{S}(x), \widetilde{\upsilon_\mathcal{T}}(x) \rangle \in C$, so folgt, da C existenztreu ist, daß $\widetilde{\upsilon_\mathcal{T}}(x) \in \mathcal{D}_\mathcal{T}$ ist. Dann gilt aber $\langle \mathcal{T}, \widetilde{\upsilon_\mathcal{T}} \rangle \vDash E!(x)$ und daher $\langle \mathcal{S}, \upsilon_\mathcal{S} \rangle \vDash E!(x) \rightarrow \Box E!(x)$, was zu zeigen war. □

Satz 7.10 (Kanonizität von (NdE)) *Das kanonische Frame der Logik* $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdE)$ *ist existenztreu, d.h. es gilt* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} \models (NdE)$.

B e w e i s. Sei $\mathfrak{F}$ das kanonische Frame der Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdE)$. Sei $\mathfrak{I}$ beliebig und sei $\mathcal{S}_\Delta$ eine mögliche Welt in $\mathfrak{f}$ und $[x]_\Delta \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}_\Delta}$, d.h. $E!(x) \in \Delta$. Sei ferner angenommen, daß $\Delta \xrightarrow{C_f} \Gamma$ und $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$ gilt. Da $E!(x) \rightarrow \Box E!(x) \in \mathfrak{L}$ ist, folgt $\Box E!(x) \in \Delta$ und mit $(\Delta^\Box)^f \subseteq \Gamma$ somit auch $E!(f(x)) \in \Gamma$. Dann ist $[f(x)]_\Gamma \in \mathcal{D}_\Gamma$. Es ist aber wegen $\langle [x]_\Delta, [y]_\Gamma \rangle \in C_f$ auch $f(x) \in [y]_\Gamma$ und daher $[f(x)]_\Gamma = [y]_\Gamma$, also $[y]_\Gamma \in \mathcal{D}_{\mathcal{S}_\Gamma}$. Dies zeigt, daß Relationen C_f existenztreu sind. □

Korollar 7.6 *Die Logik* $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdE)$ *ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller existenztreuen Frames.*

Korollar 7.7 *Die Logik* $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (CBF)$ *ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller existenztreuen Frames.*

B e w e i s. Dies folgt unmittelbar aus dem Lemma 7.20 zusammen mit Korollar 7.6, da

$$\mathbf{FK} + (NdE) \vdash \phi \Longleftrightarrow \mathbf{FK} + (CBF) \vdash \phi.$$

□

Lemma 7.24 *Ist* $\mathfrak{F}$ *fiktionaltreu, so gilt* $\mathfrak{F} \models (NdF)$.

B e w e i s. Wie im Lemma 7.23. □

Satz 7.11 (Kanonizität von (NdF)) *Das kanonische Frame der Logik* $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdF)$ *ist fiktionaltreu, d.h. es gilt* $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} \models (NdF)$.

B e w e i s. Analog zu Satz 7.10. □

Korollar 7.8 *Die Logik* $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (NdF)$ *ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller fiktionaltreuen Frames.*

Definition 7.41 (Lokal–reflexive und reflexive Frames)
(a) Ein modales Frame $\mathfrak{F}$ *heißt* lokal–reflexiv, *falls für jede Welt* $\mathcal{S}$, *jede natürliche Zahl* n *und jedes* n*–Tupel* $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$ *von Elementen aus* $\mathcal{U}_\mathcal{S}$, *in* $\mathfrak{F}$ *eine Relation* $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ *existiert, mit* $C \supset \{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle \mid i = 1, \ldots, n\}$.
(b) Ein modales Frame $\mathfrak{F}$ *heißt* reflexiv, *falls es lokal–reflexiv ist und für jede Welt und jedes* n*–Tupel in* $\mathcal{U}_\mathcal{S}$ *dieselbe Relation* $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ *gewählt werden kann, d.h. zu jeder Welt* $\mathcal{S}$ *eine Relation* C *existiert, so daß* $C \supset \{\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \mid \mathbf{a} \in \mathcal{U}_\mathcal{S}\}$.

Bemerkung 7.10 *Ist* $\mathfrak{F}$ *reflexiv und zusätzlich funktional, so ist für jede Welt* $\mathcal{S}$ *in* $\mathfrak{F}$, $C = id_{\mathcal{U}_\mathcal{S}} \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$.

Lemma 7.25 *Ist* $\mathfrak{F}$ *lokal–reflexiv, so gilt* $\mathfrak{F} \models (T)$.

B e w e i s. Sei Υ eine beliebige Belegung in $\mathfrak{F}$, $\mathcal{I}$ eine beliebige Interpretationsfunktion, $\mathcal{S}$ eine beliebige mögliche Welt, ϕ eine modale Formel mit den freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$ und sei $\upsilon_{\mathcal{S}}(x_i) = \mathbf{a}_i$. Dann existiert, da $\mathfrak{F}$ lokal–reflexiv ist, eine Counterpart–Relation $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{S}}$ mit $C \supset \{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{a}_i \rangle \mid i = 1, \ldots, n\}$. Gilt dann $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \Box\phi(\bar{x})$, so folgt $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \phi(\bar{x})$, wegen $\langle \upsilon(x_i), \upsilon(x_i) \rangle \in C$ für alle i. Das heißt aber, es gilt $\mathfrak{F} \vDash \Box\phi(\bar{x}) \to \phi(\bar{x})$. $\Box$

Satz 7.12 (Kanonizität von (T)) *Das kanonische Frame der Logik* $\mathcal{L} = \mathbf{FK} + (T)$ *ist reflexiv, d.h. ein Frame für (T). Also gilt* $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}} \vDash (T)$.

B e w e i s. Wir zeigen, daß $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$ reflexiv ist. Seien wieder $\mathcal{I}$ und Υ beliebig und sei $\mathcal{S}_\Delta$ eine mögliche Welt in $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}}$. Die identische Variablensubstitution id ist sicherlich treu. Ist außerdem $\Box\phi \in \Delta$, so ist wegen $\Box\phi \to \phi \in \mathcal{L} \subset \Delta$ auch ϕ in Δ. Daher ist $(\Delta^{\Box})^{id} \subset \Delta$ und somit $C_{id} \in \mathfrak{Co}(\mathcal{S}_\Delta, \mathcal{S}_\Delta)$. C_{id} erfüllt aber $\langle [x]_\Delta, [x]_\Delta \rangle \in C_{id}$, für alle $x \in Var$, weshalb $\mathfrak{F}$ reflexiv ist. $\Box$

Korollar 7.9 *Die Logik* $\mathcal{L} = \mathbf{FK} + (T)$ *ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller lokal–reflexiven Frames.*

Definition 7.42 (Komposition von CE–Relationen) *Sind* $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ *und* $\mathcal{T} \xrightarrow{\widehat{C}} \mathcal{R}$ *zwei CE–Relationen, so bezeichne* $\widehat{C} \circ C$ *die Komposition dieser Relationen, die definiert ist durch:*

$$\widehat{C} \circ C := \{\langle \mathbf{a}, \mathbf{c} \rangle \mid \textit{es gibt ein } \mathbf{b} \in \mathcal{U}_{\mathcal{T}},\ \textit{so daß } \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \in C \textit{ und } \langle \mathbf{b}, \mathbf{c} \rangle \in \widehat{C}\}$$

und offenbar wieder eine CE–Relation ist.

Definition 7.43 (Lokal–transitive und transitive Frames)

(a) Ein modales Frame $\mathfrak{F}$ *heißt* lokal–transitiv, *falls zu jedem Paar* $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ *in* $\mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ *und* $\mathcal{T} \xrightarrow{\widehat{C}} \mathcal{R}$ *in* $\mathfrak{Co}_{\mathcal{T},\mathcal{R}}$, *jeder natürlichen Zahl n und jedem Tripel* $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n \rangle$, $\langle \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n \rangle$ *und* $\langle \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n \rangle$ *von n–Tupeln aus* $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ *bzw.* $\mathcal{U}_{\mathcal{R}}$ *mit* $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i \rangle \in C$ *und* $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{c}_i \rangle \in \widehat{C}$ *(i = 1,...,n) eine Counterpart Relation* $\widetilde{C} \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ *existiert, so daß* $\widetilde{C} \supset \{\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{c}_i \rangle \mid i = 1, \ldots, n\}$ *gilt.*

(b) $\mathfrak{F}$ *heißt* transitiv, *falls zu jedem Paar* $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ *in* $\mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ *und* $\mathcal{T} \xrightarrow{\widehat{C}} \mathcal{R}$ *in* $\mathfrak{Co}_{\mathcal{T},\mathcal{R}}$ *eine Counterpart–Relation* $\mathcal{S} \xrightarrow{\widetilde{C}} \mathcal{R}$ *in* $\mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ *existiert, so daß* $\widetilde{C} \supset C \circ \widehat{C}$ *gilt.*

Bemerkung 7.11 *Ist* $\mathfrak{F}$ *transitiv und darüber hinaus funktional, so gilt*

$$C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}} \textit{ und } \widehat{C} \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{T},\mathcal{R}} \Longrightarrow \widetilde{C} = \widehat{C} \circ C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{R}}.$$

Lemma 7.26 *Ist* $\mathfrak{F}$ *lokal–transitiv, so gilt* $\mathfrak{F} \vDash (4)$.

B e w e i s. Sei $\mathfrak{F}$ lokal–transitiv und sei angenommen, daß $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}} \rangle \vDash \Box\phi(\bar{x}) \wedge \Diamond\Diamond\neg\phi(\bar{x})$ für eine Belegung Υ und eine Interpretationsfunktion $\mathcal{I}$ in $\mathfrak{F}$ und eine modale Formel $\phi(\bar{x})$ mit den n freien Variablen $x_1, \ldots, x_n$. Dann existieren aber Counterpart–Relationen $\mathcal{S} \xrightarrow{C} \mathcal{T}$ und $\mathcal{T} \xrightarrow{\widehat{C}} \mathcal{R}$ und $\bar{x}$–Varianten $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}$ und $\widetilde{\upsilon_{\mathcal{R}}}$, so daß $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(x_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x_i)\rangle \in C$ und $\langle \widetilde{\upsilon_{\mathcal{T}}}(x_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{R}}}(x_i)\rangle \in \widehat{C}$ $(i = 1, \ldots, n)$ gilt und $\langle \mathcal{R}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{R}}}\rangle \vDash \neg\phi(\bar{x})$. Da aber $\mathfrak{F}$ lokal–transitiv ist, existiert eine Relation $\widetilde{C} \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{R}}$ mit $\langle \upsilon_{\mathcal{S}}(x_i), \widetilde{\upsilon_{\mathcal{R}}}(x_i)\rangle \in \widetilde{C}$. Wegen $\langle \mathcal{S}, \upsilon_{\mathcal{S}}\rangle \vDash \Box\phi(\bar{x})$ müsste dann aber ebenfalls $\langle \mathcal{R}, \widetilde{\upsilon_{\mathcal{R}}}\rangle \vDash \phi(\bar{x})$ gelten, was unmöglich ist. Also folgt $\mathfrak{F} \vDash \Box\phi(\bar{x}) \to \Box\Box\phi(\bar{x})$. □

Satz 7.13 (Kanonizität von (4)) *Das kanonische Frame der Logik* $\mathcal{L} = \mathbf{FK} + (4)$ *ist transitiv, d.h. es gilt* $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}} \vDash (4)$.

B e w e i s. Wir zeigen, daß $\mathfrak{F}$ transitiv ist. Sei angenommen, daß $(\Delta^{\Box})^f \subset \Gamma$ und $(\Gamma^{\Box})^g \subset \Theta$ gilt. Ist dann $\Box\phi \in \Delta$, so ist wegen $\Box\phi \to \Box\Box\phi \in \mathcal{L}$ auch $\Box\Box\phi \in \Delta$ und daher $\Box\phi^f \in \Gamma$ und schließlich $\phi^{g\circ f} \in \Theta$. Das heißt aber $(\Delta^{\Box})^{g\circ f} \subset \Theta$. Es ist aber $g \circ f$ eine treue Substitution und somit $C_{g\circ f} \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S}_\Delta,\mathcal{R}_\Theta}$ und $C_{g\circ f} = C_g \circ C_f$. Also ist $\mathfrak{F}$ transitiv und es gilt $\mathfrak{F}_{\mathcal{L}} \vDash \Box\phi \to \Box\Box\phi$. □

Korollar 7.10 *Die Logik* $\mathcal{L} = \mathbf{FK} + (4)$ *ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller lokal–transitiven Frames.*

Definition 7.44 (Inverse CE–Relationen) *Sei* $\mathfrak{F}$ *ein modales Frame und* $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$. *Dann heißt eine CE–Relation* C^{-1} *eine* Inverse *von* C, *falls* $\langle \mathbf{b}, \mathbf{a}\rangle \in C^{-1}$, *wann immer* $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b}\rangle \in C$ *gilt.*

Definition 7.45 (Lokal–symmetrische und symmetrische Frames)
(a) Ein modales Frame $\mathfrak{F}$ *heißt* lokal–symmetrisch, *falls für jede Relation* $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ *und jedes n-Tupel* $\langle \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n\rangle$ *aus* $\mathcal{U}_{\mathcal{S}}$ *mit* $\langle \mathbf{a}_i, \mathbf{b}_i\rangle \in C$ *für* $i = 1, \ldots, n$ *und ein n–Tupel* $\bar{\mathbf{b}}$ *aus* $\mathcal{U}_{\mathcal{T}}$ *eine lokale Inverse* $C^{-1} \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ *mit* $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_i\rangle \in C^{-1}$ $(i = 1, \ldots, n)$ *existiert.*
(b) Ein modales Frame $\mathfrak{F}$ *heißt* symmetrisch, *falls für jede Relation* $C \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{S},\mathcal{T}}$ *eine Inverse* $C^{-1} \in \mathfrak{Co}_{\mathcal{T},\mathcal{S}}$ *existiert.*

Bemerkung 7.12 *Ist ein modales Frame* $\mathfrak{F}$ *symmetrisch und nicht fusionsfrei, so existiert ein* $C^{-1} \in \mathcal{C}$, *welches nicht funktional ist, d.h.* $\mathfrak{F}$ *ist nicht funktional. Ist ein modales Frame* $\mathfrak{F}$ *symmetrisch und nicht funktional, so existiert ein* $C^{-1} \in \mathcal{C}$, *welches nicht fusionsfrei ist, d.h.* $\mathfrak{F}$ *ist nicht fusionsfrei.*
Ein symmetrisches Frame ist also entweder funktional und fusionsfrei oder keines von beiden. Darüber hinaus sind Inverse in einem symmetrischen Frame $\mathfrak{F}$ *genau dann eindeutig bestimmt, wenn* $\mathfrak{F}$ *funktional und fusionsfrei ist und Counterpart–Relationen außerdem rechtstotal (surjektiv) sind. Inverse ihrerseits sind stets per definitionem rechtstotal.*

Lemma 7.27 *Ist* $\mathfrak{F}$ *lokal–symmetrisch, so gilt* $\mathfrak{F} \vDash (B)$.

B e w e i s. Dies beweise man analog zu Lemma 7.26. □

Korollar 7.11 *Ist* $\mathfrak{F}$ *symmetrisch, so gilt* $\mathfrak{F} \vDash (B)$.

B e w e i s. Dies folgt sofort aus dem letzten Lemma, da jedes symmetrische Frame auch lokal–symmetrisch ist. □

Vermutung 7.1 (Kanonizität von (B)) *Das kanonische Frame der Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (B)$ ist lokal–symmetrisch, d.h. es gilt $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} \models (B)$.*

Vermutung 7.2 *Die Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (B)$ ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller lokal–symmetrischen Frames.*

Definition 7.46 ((Semi–) kategorielle Frames) *Wir nennen ein modales Frame $\mathfrak{F}$* semi–kategoriell, *falls es reflexiv und transitiv ist. Des weiteren heißt $\mathfrak{F}$* kategoriell, *falls $\mathfrak{F}$ funktional und semi–kategoriell ist.*

Bemerkung 7.13 *Wie man leicht nachprüfen kann sind kategorielle Frames in denen die einzelnen Welten gleichzeitig Modelle der klassischen Prädikatenlogik sind semantisch gleichwertig zu den in Kapitel 4 definierten $\mathcal{C}$–Mengen. Das heißt eine Formel ist gültig in allen $\mathcal{C}$–Mengen genau dann, wenn sie in allen kategoriellen Frames mit klassischen Strukturen als Welten gültig ist. Die Basislogik der Funktor–Semantik erhält man also aus* **FK** *durch Ergänzung der Schemata (Cl), (NdI), (4) und (T).*

Lemma 7.28 *Ist $\mathfrak{F}$ ein existenzfreundliches Frame, so gilt $\mathfrak{F} \models (BF)$.*

B e w e i s. Erneut analog zu Lemma 7.26. □

Vermutung 7.3 (Kanonizität von (BF)) *Das kanonische Frame der Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (BF)$ ist existenzfreundlich, d.h. es gilt $\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} \models (BF)$.*

Vermutung 7.4 *Die Logik $\mathfrak{L} = \mathbf{FK} + (BF)$ ist Frame–vollständig bzgl. der Klasse aller existenzfreundlichen Frames.*

Die vorausgehenden Beispiele legen bereits nahe, daß jede 'prädikatenlogische Version' einer kanonischen modalen Aussagenlogik wieder kanonisch ist. In der Tat kann man durch ein ähnliches Argument wie in [Skvortsov/Shehtman 1993] (S. 92), den folgenden Satz beweisen. Man vergleich diesbezüglich auch den Satz 5.5.

Satz 7.14 *Ist $\mathfrak{L}$ eine kanonische modale Aussagenlogik, so ist die freie modale Prädikatenlogik $F\mathfrak{L}$ gleichfalls kanonisch.*

7.6 Generalisierte Frames

In diesem letzten — etwas skizzenhaften — Abschnitt soll schließlich noch gezeigt werden, wie durch eine geeignete Bereicherung des Begriffs eines modalen Frames durch eine modale ‘Algebra zulässiger Interpretationen’, generelle Frame–Vollständigkeit erreicht werden kann. Dies geschieht in Analogie zur modalen Aussagenlogik; insbesondere ist der unten eingeführte Begriff einer komplexen Algebra eine natürliche Verallgemeinerung des Konzepts einer modalen Algebra (boolschen Algebra mit Operatoren), wie es aus der modalen Aussagenlogik hinlänglich bekannt ist.

Definition 7.47 (Komplexe Algebren) *Sei $\mathfrak{F} = \langle \mathcal{U}, \mathcal{C} \rangle$ ein modales Frame, wobei $\mathcal{U} = \{\langle D_w, U_w \rangle \ : \ w \in W\}$ die zugehörige Familie von Universen bezeichne. Eine n–*Menge *ist eine Menge von Elementen der Form $\langle \mathbf{a}, w \rangle$, wobei $w \in W$ und $\mathbf{a} \in (\mathcal{U}_w)^n$ ist. Ist A eine n–Menge, so definiere man*

$$\blacklozenge A := \{\langle \mathbf{b}, w \rangle \in (U_w)^n \times \{w\} \ : \ \textit{es gibt ein } \langle \mathbf{a}, v \rangle \in A \\ \textit{und ein } C \in \mathfrak{Co}_{w,v} \textit{ so daß } \langle \mathbf{b}, \mathbf{a} \rangle \in C\} \ .$$

Ist $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ eine Abbildung und $\mathbf{a}$ ein n–Tupel, so bezeichne $\sigma(\mathbf{a})$ das m–Tupel $\langle a_{\sigma(1)}, a_{\sigma(2)}, \ldots, a_{\sigma(m)} \rangle$. Sind eine m–Menge A und eine Abbildung $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$ gegeben, so setze

$$\widehat{\sigma}(A) := \{\langle \mathbf{a}, w \rangle \in (\mathcal{U}_w)^n \times \{w\} : \langle \sigma(\mathbf{a}), w \rangle \in A\} \ .$$

Ist ferner $j \in \omega$, A eine n–Menge und $j \leq n$, so definiere die Operation $\mathbb{E}_j$ wie folgt:

$$\mathbb{E}_j(A) := \{\langle a_1, \ldots, a_{j-1}, c, a_{j+1}, \ldots, a_n, w \rangle \in (U_w)^n \times \{w\} \ : \ c \in U_w \textit{ und} \\ \textit{es gibt ein } b \in D_w, \textit{ so daß } \langle a_1, \ldots, a_{j-1}, b, a_{j+1}, \ldots, a_n, w \rangle \in A\}$$

Sind schließlich $i, j, n \in \omega$ mit $i, j \leq n$ und ist A eine n–Menge, so definiere die Operation $id_{i,j}$ durch

$$id_{i,j}(A) := \{\langle \mathbf{a}, w \rangle \in (U_w)^n \times \{w\} \ : \ \langle \mathbf{a}, w \rangle \in A \textit{ und } a_i = a_j\}.$$

Eine komplexe Algebra $\mathbb{G}_n$ vom Typ n *über $\mathcal{U}$ wird als eine Familie von n–Mengen definiert, welche unter allen boolschen Operationen und außerdem unter den Operationen $\blacklozenge$, $\mathbb{E}_j$ für jedes $j \in \omega$ und $id_{i,j}$ für jedes Paar $i, j \in \omega$ abgeschlossen ist. Eine* komplexe Algebra *ist dann eine Folge $\mathbb{G} = \langle \mathbb{G}_n : n \in \omega \rangle$, in welcher die $\mathbb{G}_n$ komplexe Algebren vom Typ n sind ($i \in \omega$) und $\bigcup_{i \in \omega} \mathbb{G}_i$ zusätzlich abgeschlossen ist unter der Operation $\widehat{\sigma}$ für jedes σ.*

Definition 7.48 (Generalisierte Frames) *Ein* generalisiertes Frame *$\gamma\mathfrak{F}$ ist ein Paar $\langle \mathfrak{F}, \mathbb{G} \rangle$, wobei $\mathfrak{F}$ ein modales Frame ist und $\mathbb{G}$ eine komplexe Algebra basierend auf $\mathfrak{F}$. Eine* Interpretation *$\mathcal{I}$ in $\mathfrak{F}$ heißt* zulässig*, falls für jedes n–stellige Relationssymbol P, $\mathcal{I}(P) \in \mathbb{G}_n$ ist. Ein* Modell *basierend auf einem* *generalisierten Frame $\langle \mathfrak{F}, \mathbb{G} \rangle$ ist ein Tripel $\langle \mathfrak{F}, \mathbb{G}, \mathfrak{I} \rangle$, wobei $\mathfrak{I}$ eine zulässige Interpretation ist. Eine Formel heißt dann* allgemeingültig *in einem generalisierten Frame $\gamma\mathfrak{F}$, falls sie in jedem Modell basieren auf $\gamma\mathfrak{F}$ gilt.*

Ist ein Modell $\langle \mathfrak{F}, \mathbb{G}, \mathfrak{I} \rangle$ basierend auf dem generalisierten Frame $\langle \mathfrak{F}, \mathbb{G} \rangle$ gegeben, so ordnen wir jeder natürlichen Zahl n und jeder Formel ϕ deren freie Variablen unter $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ vorkommen und exakt $\sigma(\bar{x}) = \langle x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(m)} \rangle$ sind (wobei $\sigma : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$) induktiv eine n–Menge $\widehat{\mathfrak{I}}(\phi, n)$ wie folgt zu.

$$\begin{array}{lcl}
\widehat{\mathfrak{I}}(P^m(\sigma(\bar{x})), n) & := & \widehat{\sigma}(\mathfrak{I}(P^m)) \\
\widehat{\mathfrak{I}}(x_i \doteq x_j, n) & := & id_{i,j}(\mathfrak{U}^n) \\
\widehat{\mathfrak{I}}(\neg\phi, n) & := & \mathfrak{U}^n - \widehat{\mathfrak{I}}(\phi, n) \\
\widehat{\mathfrak{I}}(\phi_1 \wedge \phi_2, n) & := & \widehat{\mathfrak{I}}(\phi_1, n) \cap \widehat{\mathfrak{I}}(\phi_2, n) \\
\widehat{\mathfrak{I}}(\Diamond\phi, n) & := & \blacklozenge\widehat{\mathfrak{I}}(\phi, n) \\
\widehat{\mathfrak{I}}(\exists x_j.\phi, n) & := & \mathbb{E}_j(\widehat{\mathfrak{I}}(\phi, n))
\end{array}$$

Es folgt, daß für jede Formel $\phi(x_1, \ldots, x_n)$, deren freie Variablen unter $\{x_1, \ldots, x_n\}$ vorkommen, $\widehat{\mathfrak{I}}(\phi) \in \mathbb{G}_n$ ist. Das *kanonische generalisierte $\mathfrak{L}$–Frame* wird nun wie folgt definiert. Die Menge der möglichen Welten und Relationen zwischen diesen sind wie bisher definiert. Gleichfalls ist die kanonische Belegung $\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}}$ wie bisher auf Relationssymbolen erklärt. Wir definieren nun eine komplexe Algebra vom Typ n über $\mathfrak{U}^n$ mit Hilfe der kanonischen Interpretation wie folgt.

$$\mathbb{G}_n := \{\widehat{\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}}}(\phi, n) : FV(\phi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}\} \ .$$

Wie man leicht sieht, definiert man auf diese Weise ein generalisiertes Frame. Die Theorie eines generalisierten Frames ist jedoch nach wie vor nicht in jedem Fall unter zweitstufigen Substitutionen abgeschlossen und ist somit im allgemeinen keine modale Prädikatenlogik. Die Theorie des kanonischen generalisierten Frames ist jedoch stets unter zweitstufigen Substitutionen abgeschlossen, und dies reicht aus, um das folgende Resultat zu etablieren. Dabei verstehen wir unter einem $\mathfrak{L}$–Frame ein modales Frame $\mathfrak{F}$ derart, daß $\mathfrak{F} \vDash \mathfrak{L}$.

Satz 7.15 (Vollständigkeit) *Ist $\mathfrak{L}$ eine modale Prädikatenlogik und $\mathbb{K}$ die Klasse aller generalisierten $\mathfrak{L}$–Frames, so ist $\mathfrak{L}$ vollständig bezüglich $\mathbb{K}$, d.h. $\mathfrak{L} = \bigcap_{\gamma\mathfrak{F} \in \mathbb{K}} Th(\gamma\mathfrak{F})$.*

B e w e i s. Sei $\gamma\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}}$ das kanonische generalisierte Frame und sei angenommen, daß $\phi \in \mathfrak{L}$, so daß $\gamma\mathfrak{F}_{\mathfrak{L}} \nvDash \phi$. Dann gibt es eine zulässige Interpretation $\mathfrak{I}$, eine mögliche Welt $\mathcal{S}_\Delta$ und eine Belegung β, so daß $\langle \mathcal{S}_\Delta, \mathfrak{I}, \beta \rangle \nvDash \phi$. Da $\mathfrak{L}$ unter erststufigen Substitutionen abgeschlossen ist, können wir oBdA annehmen, daß β die kanonische Belegung v_Δ ist. Seien $P_1^{n_1}, \ldots, P_m^{n_m}$ alle in ϕ auftauchenden Relationssymbole. Da $\mathfrak{I}$ zulässig ist, ist $\mathfrak{I}(P_i^{n_i}, \Delta) = \widehat{\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}}}(\psi_i) \in \mathbb{G}_{n_i}$ für $i = 1, \ldots, m$. Insbesondere ist $FV(\psi_i) \subseteq \{x_1, \ldots, x_{n_i}\}$. Da ferner $\phi \in \mathfrak{L}$ ist und $\mathfrak{L}$ unter zweitstufigen Substitutionen abgeschlossen ist, folgt weiter, daß auch $\widetilde{\phi} = (\psi_1/P_1^{n_1}, \ldots, \psi_m/P_m^{n_m})\phi \in \mathfrak{L}$. Aber da $\mathfrak{I}(P_i^{n_i}) = \widehat{\mathfrak{I}_{\mathfrak{L}}}(\psi_i)$ folgt per Induktion, daß $\langle \mathcal{S}_\Delta, \mathfrak{I}_{\mathfrak{L}} \rangle \nvDash \widetilde{\phi}$ und dies widerspricht $Th(\mathfrak{f}_{\mathfrak{L}}) = \mathfrak{L}$. Dies zeigt, daß das kanonische generalisierte Frame $\gamma\mathfrak{F}$ ein $\mathfrak{L}$–Frame ist. Nun folgt die Vollständigkeit sofort unter Benutzung des Satzes über kanonische Modelle. □

8 Thesen

Die in dieser Arbeit entwickelten semantischen Begriffe und Methoden stellen lediglich den Beginn einer systematischen Aufarbeitung der Modelltheorie erststufiger Modallogik dar. Im folgenden seien daher stichpunktartig Problemfelder genannt, die sich auf natürliche Weise als Kandidaten für ein weitergehendes Studium der hier vorgestellten Semantik anbieten.

- **Syntaktische Erweiterungen** Es ist die semantische Behandlung diverser Spracherweiterungen zu untersuchen. An erster Stelle stehen hierbei der Gebrauch von Individuenkonstanten unter Benutzung des termbindenden Lambda–Operators (vergleiche Kapitel 3.2) sowie die Behandlung bestimmter Kennzeichnungen in modalen Kontexten. Darüber hinaus sind Erweiterungen auf spezielle modale Operatoren, etwa den Aktualitätsoperator zu untersuchen.

- **Vergleich mit anderen Modellkonzepten** Es ist systematisch der Zusammenhang zwischen klassischen Kripke–Strukturen und den verschiedenen vorgeschlagenen Verallgemeinerungen der klassischen Semantik zu untersuchen.

- **Substitutionsprinzipien** Es ist zu untersuchen, welche Substitutionsprinzipien für welche Logiken und welche Anwendungen adäquat sind. Insbesondere sind diverse, unterschiedlich starke zweitstufige Substitutionsprinzipien zu unterscheiden.

- **Individuen–Begriffe** Der Individuenbegriff, welcher verallgemeinerten Semantiken zugrunde liegt, ist näher zu analysieren. Insbesondere ist der Zusammenhang zur Auffassung, daß in modalen Kontexten Individuen mit Individuen–Konzepten identifiziert werden müssen, zu klären.

- **Vollständigkeitstheorie** Es sind die Begriffe der Frame–Vollständigkeit, Kanonizität und modalen Definierbarkeit von Strukturen in erststufigen Kontexten ausführlich zu untersuchen.

- **Anwendungen** Schließlich gilt es, die grössere Allgemeinheit und semantische Flexibilität verallgemeinerter Semantiken auch in Anwendungen fruchtbar zu machen. Diese sind primär in der Philosophie, der Linguistik und der Informatik zu suchen. Stichworte wären etwa „Vagheit“ (vergleiche etwa [Parsons/Woodruff 1999]), „Quantifying in“, Modellierung natürlicher Sprache und Modellierungsversuche in der KI, welche erststufige Modallogiken benutzen.

Literatur

[Aristoteles 1992] ARISTOTELES, *Erste Analytik*, Felix Meiner Verlag, Hamburg, 1992.

[Bauer 2000] SEBASTIAN BAUER *Metaframes, Typen und Modelle der modalen Prädikatenlogik*, Diplomarbeit, Humboldt–Universität zu Berlin, 2000.

[Bencivenga/Lambert/Meyer 1982] ERMANNO BENCIVENGA, KAREL LAMBERT UND ROBERT K. MEYER, The Ineliminability of E! in Free Quantification Theory Without Identity, in: *Journal of Philosophical Logic Vol. 11* (S. 229–231), 1982.

[Bencivenga 1986] ERMANNO BENCIVENGA, *Free Logics*, in: D. Gabbay und F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic, Volume III: Alternatives to Classical Logic* (S. 373–426), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1986.

[Bencivenga 1989] ERMANNO BENCIVENGA, Why Free Logic?, in: Ermanno Bencivenga: *Looser Ends*, The University of Minnesota Press, 1989.

[Blackburn/de Rijke/Venema 2000] PATRICK BLACKBURN, MAARTEN DE RIJKE UND YDE VENEMA, Modal Logic, (unveröffentlichtes Manuskript): *http://turing.wins.uva.nl/∼mdr/Publications/modal-logic.html*, 2000.

[Bull/Segerberg 1984] ROBERT A. BULL UND KRISTER SEGERBERG, Basic Modal Logic, in: D. Gabbay und F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic, Volume II: Extensions of Classical Logic* (S. 1–87), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1984.

[Carnap 1946] RUDOLF CARNAP, Modalities and Quantification, in: *The Journal of Symbolic Logic 11* (S. 33–64), 1946.

[Carnap 1947] RUDOLF CARNAP, *Meaning and Necessity. A Study in Semantics and Modal Logic*, The University of Chicago Press, Chicago und London, 1947; repr. 1988.

[Cepparello 1991a] GIOVANNA CEPPARELLO, *What are Individuals? New Semantics for Modal Predicate Logic*, Master's thesis, Institut für Philosophie, Universität Pisa, 1991.

[Cepparello 1991b] GIOVANNA CEPPARELLO, New Semantics for Modal Predicate Logic: An Analysis from a Standard Point of View, *Technical Report Nr. X-91-18*, Institute for Language, Logic and Information, University of Amsterdam, 1991.

[Chagrov/Zakharyaschev 1997] ALEXANDER CHAGROV UND MICHAEL ZAKHARYASCHEV, *Modal Logic*, Oxford University Press, Oxford, 1997.

[Chihara 1993] CHARLES S. CHIHARA, Modality without worlds, in: J. Czermak (ed.), *Philosophy of mathematics. Proceedings of the 15th International Wittgenstein Symposium* (S. 253–268), Hölder–Pichler–Tempsky, Wien, 1993.

[Chihara 1998] CHARLES S. CHIHARA, *The Worlds of Possibility. Modal Realism and the Semantics of Modal Logic*, Clarendon Press, Oxford, 1998.

[Cocchiarella 1984] NINO B. COCCHIARELLA, Philosophical Perspectives on Quantification in Tense and Modal Logic, in: D. Gabbay und F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic, Volume II: Extensions of Classical Logic* (S. 309–353), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1984.

[Corsi/Ghilardi 1989] GIOVANNA CORSI UND UND SILVIO GHILARDI, Dircted Frames, in: *Archiv für Mathematische Logik, Nr. 29 (1)* (S. 53–67), 1989.

[Cresswell 2000] M.J. CRESSWELL, How to complete some Modal Predicate Logics, in: Maarten de Rijke et. al. (eds.), *Advances in Modal Logic, Volume II*, CSLI Publications, Stanford, erscheint 2000.

[Etchemendy 1990] J. ETCHEMENDY, *The Concept of Logical Consequence*, Harvard University Press, Cambridge Mass., 1990.

[Fine 1975] KIT FINE, Vagueness, truth and logic, in: *Synthese Vol. 30* (S. 265–300), 1975; repr. in: Rosanna Keefe und Peter Smith (eds.), *Vagueness: A Reader* (S. 119–150), The MIT Press, Cambridge (Massachusetts), London, 1997.

[Fitting 1991] MELVIN FITTING, Modal Logic should say more than it does, in: J.-L. Lassez und G. Plotkin (eds.), *Computational Logic, Essays in Honor of Alan Robinson* (S. 113–135), MIT Press, Cambridge Mass., 1991.

[Fitting 1998] MELVIN FITTING, Bertrand Russell, Herbrands theorem and the assignment statement, in: J. Calmet und J. Plaza (eds.), *Artificial Intelligence and Symbolic Computation* (S. 14–28), Springer Lecture Notes in Artificial Intelligence Nr. 1476, Springer, 1998.

[Fitting 2000] MELVIN FITTING, Types, Tableaus, and Gödel's God, (unveröffentlichtes Manuskript): *http://comet.lehman.cuny.edu/fitting/*, 2000.

[Fitting/Mendelsohn 1998] MELVIN FITTING UND RICHARD L. MENDELSOHN, *First–Order Modal Logic*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[Friedrichsdorf 1992] ULF FRIEDRICHSDORF, *Einführung in die klassische und intensionale Logik*, Vieweg Verlag, Braunschweig, 1992.

[Garson 1984] JAMES W. GARSON, Quantification in Modal Logic, in: D. Gabbay und F. Guenthner (eds.), *Handbook of Philosophical Logic, Volume II: Extensions of Classical Logic* (S. 249–307), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1984.

[Garson 1991] James W. Garson, Applications of Free Logic to Quantified Intensional Logic, in: Karel Lambert (ed.), *Philosophical Applications of Free Logic* (S. 111–144), Oxford University Press, New York, Oxford, 1991.

[Ghilardi 1989] Silvio Ghilardi, Presheaf semantics and independence results for some non–classical first–order logics, in: *Archiv für Mathematische Logik, Nr. 29 (2)* (S. 125–136), 1989.

[Ghilardi 1991] Silvio Ghilardi, Incompleteness Results in Kripke Semantics, in: *Journal of Symbolic Logic, Nr. 2* (S. 516–538), 1991.

[Ghilardi/Meloni 1991] Silvio Ghilardi und G.C. Meloni, Philosophical and Mathematical Investigations in First Order Modal Logic, in: G. Usberti (ed.), *Problemi fondazionali nella teoria del significato* (S. 77–107), Olschki Editore, Florenz, 1991.

[Goldblatt/Thomasson 1974] R.I. Goldblatt und S.K. Thomason, Axiomatic classes in propositional modal logic, in: J. Crossley (ed.), *Algebraic Logic, Lecture Notes in Mathematics Vol. 450* (S. 163–173), Springer, Berlin, 1974.

[Hintikka 1969] Jaakko Hintikka, Existential Presuppositions and Their Elimination, in: Jaakko Hintikka: *Models for Modalities. Selected Essays* (S. 23–44), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1969.

[Hintikka 1970] Jaakko Hintikka, Existential Presuppositions and Uniqueness Presuppositions, in: K. Lambert (ed.), *Philosophical Problems in Logic*, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Vol. 29 (S. 22–55), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, London, 1970.

[Hughes/Cresswell 1984] G.E. Hughes und M.J. Cresswell, *A Companion to Modal Logic*, Methuen, London, 1984.

[Hughes/Cresswell 1996] G.E. Hughes und M.J. Cresswell, *A new introduction to Modal Logic*, Routledge, London, 1996.

[Isoda 1997] Eiko Isoda, Kripke Bundle Semantics and C–set Semantics, in: *Studia Logica 58* (S. 395–401), 1997.

[Jónsson/Tarski 1951/52] B. Jónsson und Alfred Tarski, Boolean algebras with operators I + II, in: *American Journal of Mathematics Vol. 73* (S. 891–939), 1951, bzw. *ebd., Vol. 74* (S. 127–162), 1952.

[Konyndyk 1986] K. Konyndyk, *Introduction to Modal Logic*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, Indiana, 1986.

[Kracht 1999] Marcus Kracht, *Tools and Techniques in Modal Logic*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 142, Elsevier Science Ltd., Amsterdam, 1999.

[Kripke 1963] SAUL A. KRIPKE, Semantical Considerations on Modal Logic, in: *Acta Philosophica Fennica 16* (S. 83–94), 1963.

[Kripke 1972] SAUL A. KRIPKE, Naming and Necessity, in: G. Harman und D. Davidson (eds.), *Semantics of Natural Language*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Boston, 1972; zitiert nach: Saul Kripke, *Naming and Necessity*, Blackwell, Oxford, 1981.

[Kripke 1979] SAUL A. KRIPKE, A Puzzle About Belief, in: A. Margalit (ed.), *Meaning and Use*, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, Boston, 1979.

[Lambert 1963] KAREL LAMBERT, Existential Import Revisited, in: *The Notre Dame Journal of Formal Logic Vol. 4* (288–292), 1963.

[Lambert 1997] KAREL LAMBERT, *Free Logics: Their Foundations, Character, and Some Applications Thereof*, Academia Verlag, Sankt Augustin, 1997.

[Lambert/Meyer 1968] KAREL LAMBERT UND ROBERT MEYER, Universally Free Logic And Standard Quantification Theory, in: *The Journal of Symbolic Logic Vol. 33* (S. 8–26), 1968.

[Lambert/van Fraassen 1970] KAREL LAMBERT UND BAS C. VAN FRAASSEN, Meaning Relations, Possible Objects, and Possible Worlds, in: K. Lambert (ed.), *Philosophical Problems in Logic*, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Vol. 29 (S. 1–19), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, London, 1970.

[Lawvere 1969] F.W. LAWVERE, Adjointness in foundations, in: *Dialectica Nr. 23, 3/4* (S. 281–296), 1969.

[Leblanc/Thomason 1968] HUGUES LEBLANC UND RICHMOND THOMASON, Completeness Theorems For Some Presupposition Free Logics, in: *Fundamenta Mathematicae Vol. 62* (S. 125–164), 1968.

[Leblanc/Meyer 1970] HUGUES LEBLANC UND ROBERT MEYER, On Prefacing $(\forall X)A \supset A(Y/X)$ With $(\forall Y)$: A Free Quantification Theory Without Identity, in: *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik Vol. 16* (S. 447–462), 1970.

[Lewis 1968] DAVID LEWIS, Counterpart Theory and Quantified Modal Logic, in: *Journal of Philosophy, Vol. 65* (S. 113–126), 1968; repr. in: Michael J. Loux (ed.), *The Possible and the Actual*, Ithaca 1979; sowie David Lewis, *Philosophical papers 1*, Oxford 1983.

[Lewis 1986] DAVID LEWIS, *On the plurality of worlds*, Basil Blackwell, Oxford, 1986.

[Łukasiewicz 1957] JAN ŁUKASIEWICZ, *Aristotle's syllogistics from the standpoint of modern formal logic*, Clarendon Press, Oxford, 1957.

[Makinson 1970] D.C. MAKINSON, A generalization of the concept of a relational model for modal logic, in: *Theoria, Vol. 36* (S. 331–335), 1970.

[Marcus 1946] RUTH BARCAN MARCUS, A functional calculus of first order based on strict implication, in: *Journal of Symbolic Logic 11* (S. 1–16), 1946.

[Marcus 1993] RUTH BARCAN MARCUS, *Modalities*, Oxford University Press, New York, 1993.

[Meinong 1973] ALEXIUS MEINONG, *Gesamtausgabe*, Akademische Druck- und Verlagsanstalt, Graz, 1973.

[Ono 1983] HIROAKIRA ONO, Model Extension Theorem and Craig's Interpolation Theorem for Intermediate Predicate Logics, in: *Reports on Mathematical Logic Nr. 15* (S. 41–58), 1983.

[Parsons 1980] TERENCE PARSONS, *Nonexistent Objects*, Yale University Press, New Haven und London, 1980.

[Parsons/Woodruff 1999] TERENCE PARSONS UND PETER WOODRUFF, Wordly indeterminacy of identity, in: Rosanna Keefe und Peter Smith (eds.), *Vagueness: A Reader* (S. 321–337), MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1999.

[Pearce/Wansing 1988] DAVID PEARCE UND HEINRICH WANSING, On the methodology of possible worlds semantics, I: Correspondence theory, in: *Notre Dame Journal of Formal Logic, Vol. 29* (S. 482–496), 1988.

[Plantinga 1974] ALVIN PLANTINGA, *The Nature of Necessity*, Oxford University Press, Oxford, 1974.

[Quine 1953] W.V.O. QUINE, Three Grades of Modal Involvement, in: W.V.O. Quine, *The Ways of Paradox and Other Essays* (S. 156–174), Random House, New York, 1953.

[Quine 1961] W.V.O. QUINE, *From a Logical Point of View*, Harper & Row, New York, 1961.

[Ramsey 1925] F. P. RAMSEY, The Foundations of Mathematics, *Proceedings of the London Mathematical Society, (2) 25* (S. 338–384), 1925; repr. in: R.B. Braithwaite (ed.), *The Foundations of Mathematics*, Littlefield, Adams, Paterson, 1960.

[Rautenberg 1979] WOLFGANG RAUTENBERG, *Klassische und nichtklassische Aussagenlogik*, Vieweg, Braunschweig, 1979.

[Rautenberg 1996] WOLFGANG RAUTENBERG, *Einführung in die Mathematische Logik: Ein Lehrbuch mit Berücksichtigung der Logikprogrammierung*, Vieweg, Braunschweig, 1996.

[Rosen 1990] GIDEON ROSEN, Modal Fictionalism, in: *Mind, No. 99* (S. 327–354), 1990.

[Scott 1970] DANA SCOTT, Advice on Modal Logic, in: K. Lambert (ed.), *Philosophical Problems in Logic*, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Vol. 29 (S. 143–174), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, London, 1970.

[Scott 1967] DANA SCOTT, Existence and Description In Formal Logic, in: Ralph Schoenman (ed.), *Bertrand Russell: Philosopher of the Century*, Allan and Unwin, London, 1967; repr. in: *Philosophical Applications Of Free Logic* (S. 28–48), Oxford University Press, Oxford, New York, 1991.

[Sahlqvist 1975] HENDRIK SAHLQVIST, Completeness and correspondence in the first and second order semantics for modal logic, in: Stig Kanger (ed.), *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Vol. 82* (S. 110–143), North–Holland, Amsterdam, 1975.

[Sambin/Vaccaro 1989] G. SAMBIN UND V. VACCARO, Topology and Duality in Modal Logic, in: *Annals of pure and applied logic, Nr. 37* (S. 249–296), 1989.

[Shirasu 1998] HIROYUKI SHIRASU, Duality in Superintuitionistic and Modal Predicate Logics, in: Marcus Kracht et. al. (eds.), *Advances in Modal Logic, Volume I* (S. 223–236), CSLI Publications, Stanford, 1998.

[Skvortsov/Shehtman 1990] D.P. SKVORTSOV UND V.B. SHEHTMAN, Semantics of non–classical first order predicate logics, in: P. Petkov (ed.), *Mathematical Logic* (S. 105–116), Plenum Press, New York, 1990.

[Skvortsov/Shehtman 1993] D.P. SKVORTSOV UND V.B. SHEHTMAN, Maximal Kripke–type semantics for modal and superintuitionistic predicate logics, in: *Annals of Pure and Applied Logic, Nr. 63* (S. 69–101), 1993.

[Stalnaker/Thomason 1968a] R. STALNAKER UND R. THOMASON, Abstraction in first–order modal logic, in: *Theoria, Vol. 34* (S. 203–207), 1968.

[Stalnaker/Thomason 1968b] R. STALNAKER UND R. THOMASON, Modality and reference, in: *Nous, Vol. 2* (S. 359–372), 1968.

[Thom 1996] PAUL THOM, *The Logic of Essentialism. An Interpretation of Aristotle's Modal Syllogistic*, Kluwer, Dordrecht, 1996.

[Thomason 1970] RICHMOND H. THOMASON, Some Completeness Results for Modal Predicate Calculi, in: K. Lambert (ed.), *Philosophical Problems in Logic*, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Vol. 29 (S. 56–76), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, London, 1970.

[Trew 1970] A. TREW, Nonstandard theories of quantification and identity, in: *Journal of Symbolic Logic Nr. 35* (267–294), 1970.

[van Benthem 1984] JOHAN VAN BENTHEM, Possible Worlds Semantics: A Research Program that Cannot Fail?, in: *Studia Logica Vol. 43* (S. 379–393), 1984.

[van Benthem 1986] Johan van Benthem, *Essays in Logical Semantics*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1986.

[van Benthem 1993] Johan van Benthem, Beyond Accessibility: Functional Models for Modal Logic, in: Maarten de Rijke (ed.), *Diamonds and Defaults: Studies in Pure and Applied Intensional Logic* (S. 1–18), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[van Fraassen 1966] Bas van Fraassen, The Completeness Of Free Logic, in: *Zeitschrift für mathematische Logik und Grundlagen der Mathematik Vol. 12* (S. 219–234), 1966.

[van Fraassen 1967] Bas van Fraassen, Meaning Relations Among Predicates, in: *Noûs Vol. 1* (S. 161–179), 1967.

[Wittgenstein 1921] Ludwig Wittgenstein, Logisch–Philosophische Abhandlung, in: *Annalen der Naturphilosophie, Bd. 14, Heft 3–4*, 1921; zweisprachige Ausgabe (deutsch/englisch) unter dem Titel: *Tractatus logico–philosophicus*, Routledge & Kegan Paul, London, 1922; repr. in: Werkausgabe Bd. 1, Suhrkamp, Frankfurt am Main, 1984.

[Wölfl 1999] Stefan Wölfl, *Kombinierte Zeit- und Modallogik. Vollständigkeitsresultate für prädikatenlogische Sprachen.*, Logos Verlag (Reihe Logische Philosophie), Berlin, 1999.

[Woodruff 1970] Peter W. Woodruff, Logic and Truth Value Gaps, in: K. Lambert (ed.), *Philosophical Problems in Logic*, Studies in Epistemology, Logic, Methodology, and Philosophy of Science, Vol. 29 (S. 121–142), D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, Boston, London, 1970.

Erklärung

Hiermit versichere ich, die vorliegende Diplomarbeit selbständig und ohne Benutzung anderer als der von mir angegebenen Quellen angefertigt zu haben.
Alle Stellen, die ich wörtlich oder sinngemäß aus Veröffentlichungen entnommen habe, sind als solche kenntlich gemacht.

Berlin, 26. Mai 2000,

Oliver Kutz